دولة ليبيا

وزارة التربية والتعليم والبحث العلمي

جامعة طرابلس كلية التربية / جنزور

قسم الرياضيات

مشروع تخرج لنيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

بعنوان

حل بعض التكاملات المعتلة باستخدام دالتي جاما و بيتا

إعداد الطالبة :

وصال عبدالسلام صالح محمد

تحت إشراف :

د. سعد أحمد أحمد

العام الدراسي :

2022 – 2023 م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

﴿اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ﴿١﴾ خَلَقَ الْإِنسَانَ مِنْ عَلَقٍ ﴿٢﴾
اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ ﴿٣﴾ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ﴿٤﴾
عَلَّمَ الْإِنسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ ﴿٥﴾﴾

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

(سورة العلق – الآية من 1 – 5)

الإهداء

إلى

من نزلت فيهما الآية الكريمة (وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا)

*** * أبي وأمي * ***

إلى

من هم عزوتي وسندي في الحياة

*** * إخوتي وأخواتي * ***

إلى

من أفادني بعلمه من أولى المراحل الدراسية حتي هذه اللحظة

*** * كل معلم ومعلمة * ***

إلى

من يسعى لكسب المعرفة وتزويد رصيده المعرفي والثقافي

*** * كل طالب وطالبة علم * ***

*** * إليكم جميعاً أهدي هذا البحث * ***

الشكر والتقدير

لله الحمد كله والشكر أن وفقني و ألهمني الصبر على المشاق التي واجهتني لإتمام هذا البحث .

أتقدم باسمي عبارات الشكر والتقدير إلى **(أبي وأمي)** على مساندتهم ودعمهم لي والوقوف بجانبي إلى أن وصلت إلى هذه المرحلة فأدعو الله ان يطيل في عمرهم ويمدهم بالصحة والعافية وأن يحفظهم لي ويرعاهم .

وانطلاقا من قوله صلى الله عليه وسلم (من لا يشكر الناس لا يشكر الله)

أتقدم بالشكر والتقدير إلى جميع أعضاء هيئة التدريس بقسم الرياضيات .

جدول المحتويات

المقدمة

الحمد لله الذي خلق الإنسان علمه البيان ، وله الحمد أن رفع الذين أمنو والذين أوتوا العلم درجات ، والصلاة والسلام على رسول الله المبعوث معلماً للناس أجمعين ، ورضى الله عن صحابته ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين ، أما بعد :

يعتبر علم التفاضل والتكامل من العلوم القديمة قدم البشرية ولاشك أنه يشكل ركيزة هامة في حياة الفرد ، بالرغم من أنه تبلور في القرن السابع عشر الميلادي إلا أنه كان من أكثر العلوم استخداماً في مجال الحياة التطبيقية .

وقد خصص هذا البحث لدراسة التكامل بوجه عام ودراسة أحد أنواعه بوجه خاص ، وذلك من خلال ثلاثة أبواب :

الباب الأول فقد تناولنا فيه مقدمة عن التكامل بصورة عامة وذلك من خلال أنواعه ومن ثم تناولنا فيه كل نوع على حدى حيث يعرف النوع الأول من التكامل بالتكامل الغير محدد حيث قمنا بتعريفة و من ثم قمنا بالتعرف على الرموز العلمية لعملية التكامل الغير محدد له وكذلك قمنا بالتعرّف على بعض القوانين الجبرية للتكامل الغير محدد مع بعض الأمثلة ومن ثم بعض قوانين تكامل الدوال المثلثية مع بعض الأمثلة و من ثم بعض قوانين الدوال المثلثية العكسية مع بعض الأمثلة ومن ثم قوانين الدوال الأسية مع بعض الأمثلة ومن ثم بعض طرق التكامل الغير محدد مع بعض الأمثلة ومن ثم تحدثنا عن النوع الثاني للتكامل هو التكامل المحدد حيث قمنا بتعريفه ومن ثم تعرفنا على الرموز العلمية لعملية التكامل المحدد ومن تعرفنا على كيفية حساب التكامل المحدد باستخدام النظرية الأساسية للتكامل مع بعض الأمثلة ومن ثم تعرفنا على خواص التكامل المحدد مع بعض الأمثلة .

أما الباب الثاني فقد تناولنا فيه مقدمة عن التكاملات المعتلة ومن ثم تناولنا فيه أنواع التكاملات المعتلة كل نوع على حدى مصحوبة كل منها ببعض الخواص والأمثلة .

أما الباب الثالث فقد تناولنا فيه صورة مبسطه عن دالتا جاما وبيتا ومن ثم قمنا بتعريف دالة جاما وكذلك قمنا بالتعرف على خواص دالة جاما مع بعض الأمثلة ومن ثم قمنا بتعريف دالة بيتا والتعرف على خواصها مع بعض الأمثلة ومن ثم تناولنا فيه كيفية استخدام دالتي جاما وبيتا لحل بعض التكاملات المعتلة .

مصطلحات المشروع

المشتقة :

هي المعامل التفاضلي أو هي ميل المماس لمنحنى الدالة .

خط تقارب عمودي :

إذا كانت الفترة المراد التكامل عليها محدودة ولكن الدالة غير معرفة عند تلك الفترة أي أن الدالة يكون لها خط تقارب عمودي عند نقطة داخل الفترة المراد التكامل عليها .

الدالة التزايدية :

يقال أن الدالة $y = f(x)$ تزايدية إذا زادت قيمة y بازدياد قيمة x .

الدالة التناقصية :

يقال أن الدالة $y = f(x)$ تناقصية إذا نقصت قيمة y بازدياد قيمة x .

الباب الأول

التكامل (Integral)

سنقوم في هذا الباب بدراسة نوعين من التكامل حيث يعرف النوع الأول من التكامل بالتكامل الغير محدد حيث يعرف هذا التكامل أيضاً باسم أصل المشتقة وعملية إيجاده هى عكس عملية إيجاد المشتقة ، أما النوع الثاني من التكامل فيعرف بالتكامل المحدد ويرتبط في حسابة بمسألة حساب مساحة منطقة تحدها منحنيات معينة .

(1.1) التكامل الغير محدد

(Indefinite Integral)

(1.1.1) تعريف

التكامل الغير محدد هو عملية عكسية لعملية الاشتقاق ، فإذا كانت $F(x)$ دالة ما فإن عملية الاشتقاق تختص بإيجاد مشتقة هذه الدالة $F'(x)$ بينما عملية التكامل الغير المحدد تختص بإيجاد الدالة $F(x)$ وسمى التكامل الغير محدد بهذا الاسم وذلك لأنه لا يعبر عن دالة محددة بل يعبر عن مجموعة من الدوال .

(2.1.1) الرموز العلمية لعملية التكامل الغير محدد

إذا كانت $f(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ ، فإن عملية التكامل المستخدمة لإيجاد الدالة $F(x)$ يرمز لها كالتالي :-

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c$$

حيث c هو ثابت التكامل.
حيث أن الدالة المراد تكاملها تسمي المكامل ، وعلامة التكامل تعني عملية التكامل و dx تحدد أن متغير التكامل هو x وثابت التكامل هو خاصية مشتركه لكل الدوال القابلة للاشتقاق ويوضع لتعميم الجواب .

(3.1.1) قوانين التكامل غير محدد للدوال الجبرية

1. تكامل العدد الثابت

ليكن a عدد ثابتاً فإن تكاملها يكون كالاتي :

$$\int a\, dx = ax + c$$

حيث c ثابت التكامل .

مثال (4.1.1)

اوجد قيمة التكاملات الاتية :-

1. $\int 5\,dx$

الحل :

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

2. $\int -7\,dx$

الحل :

$$\int -7\,dx = -7x + c$$

3. $\int -\frac{5}{3}\,dx$

الحل :

$$\int -\frac{5}{3}\,dx = -\frac{5}{3}x + c$$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ **بإستثناء** $n = -1$ **حيث** c **ثابت التكامل .**

مثال (5.1.1)

أوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int x^3 dx$

الحل :

$$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$

2. $\int \frac{1}{x^4}\ dx$

الحل :

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4}\ dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$$

$$= \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

3. $\int x^{\frac{2}{5}}\ dx$

الحل :

$$\int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + c$$

3. إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس فإنه لا يؤثر علي نتيجة التكامل أي أن :

$$\int \boldsymbol{af(x)dx} = \boldsymbol{a} \int \boldsymbol{f(x)\, dx}$$

وذلك لأن اشتقاق الطرفين يعطي $\boldsymbol{af(x)} = \boldsymbol{af(x)}$

(6.1.1) مثال

أوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int 7x^4\, dx$

الحل :

$$\int 7x^4\, dx = 7 \int x^4\, dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + c$$

$$= \frac{7}{5} x^5 + c$$

2. $\int \frac{-2}{x^3} dx$

الحل :

$$\int \frac{-2}{x^3} dx = -2 \int \frac{1}{x^3} dx = -2 \int x^{-3} \, dx = -2 \frac{x^{-2}}{-3+1} + c$$
$$= -2 \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$$

3. $\int \sqrt{5} x^{-\frac{2}{3}} dx$

الحل :

$$\int \sqrt{5} x^{-\frac{2}{3}} dx = \sqrt{5} \int x^{-\frac{2}{3}} \, dx = 3\sqrt{5} x^{\frac{1}{3}} + c$$

4. تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملات هذه الدوال أي أن :

إذا كانت $f(x),\ g(x)$ دالتين قابلتين للتكامل في x فإن

$$\int [\, f(x) \ \pm \ g(x)] dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

ويمكن تعميم ذلك إذا كانت $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن :

$$\int [\, f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ \dots \ \pm f_n(x)] \, dx$$
$$= \int f_1(x) \, dx \pm \int f_2(x) \, dx \pm \int f_3(x) \, dx \pm \cdots \ \dots$$
$$\pm \int f_n(x) dx$$

مثال (7.1.1)

أوجد قيمة التكاملات الاتية :-

1. $\int (x^2 - 2x + 5)\, dx$

الحل :

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx = \int x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$$

2. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right) dx$

الحل :

$$\int \sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\, dx = \int \sqrt{x}\, dx - 2\int \frac{1}{x^3}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx - 2\int x^{-3}\, dx$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^{-3+1}}{-2} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} + c$$

3. $\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right) dx$

الحل :

$$\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right) dx = \int x^5\, dx - \sqrt{2}\int x - 3\int x^{-2}\, dx$$
$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 3x^{-1} + c$$

5. إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن :

$$\int \frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{dx} = \mathbf{ln}|\boldsymbol{u}| + \boldsymbol{c}$$

مثال (8.1.1)

أوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx$

الحل :

إذا كانت $u = e^{2x^2} + 5$ فإن $u' = 4xe^{2x^2}$ بالتالي فإن :

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2}+5\right| + c$$

2. $\int \frac{\sec x^2}{5-\tan x}dx$

الحل :

إذا كانت $u = 5 - \tan x$ فإن $u' = -\sec x^2$ بالتالي فإن :

$$\int \frac{\sec x^2}{5-\tan x}dx = -\int \frac{-\sec x^2}{5-\tan x}dx = -\int \frac{u'}{u}dx = -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|5-\tan x| + c$$

(9.1.1) قوانين تكامل الدوال المثلثية

1. $\int \sin x \ dx = -\cos x + c$

2. $\int \cos x \ dx = \sin x + c$

3. $\int \tan x \ dx = \ln|\sec x| + c$

4. $\int \cot x \ dx = \ln|\sin x| + c$

5. $\int \sec x \ dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

6. $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

7. $\int \sec x \ \tan x \ dx = \sec x + c$

8. $\int \csc x \cot x \ dx = -\csc x + c$

9. $\int \sec x^2 \ dx = \tan x + c$

10. $\int \csc x^2 \ dx = -\cot x + c$

مثال (10.1.1)

اوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int \sin 2x \ dx$

الحل :

$$\int \sin 2x \ dx = \frac{1}{2}\int 2 \sin 2x \ dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

2. $\int \tan \frac{1}{3} x \ dx$

الحل :

$$\int \tan \frac{1}{3} x \ dx = 3 \int \frac{1}{3} \tan \frac{1}{3} x \ dx = 3 \ln \left| \sec \frac{1}{3} x \right| + c$$

3. $\int x \tan x^2 \sec x^2 \ dx$

الحل :

$$\int x \tan x^2 \sec x^2 \ dx = \frac{1}{2}\int 2x \tan x^2 \sec x^2 dx = \frac{1}{2} \sec x^2 + c$$

(11.1.1) بعض قوانين تكامل الدوال المثلثية العكسية

1. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$

2. $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1} x + c$

3. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$

4. $\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \cot^{-1} x + c$

5. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c$

6. $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \csc^{-1} x + c$

(12.1.1) مثال

أوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int \frac{1}{x^2+16}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{1}{x^2+16}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\frac{x^2}{16}+1}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{4} + c$$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

(13.1.1) قوانين تكامل الدوال الأسية

1. إذا كانت $\boldsymbol{u}$ دالة قابلة للاشتقاق في $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{a}$ عدد وجب لا يساوي $(\boldsymbol{-1})$ أي أن $(\boldsymbol{a \neq -1})$ فإننا نحصل علي القانون الاتي :

$$\int \boldsymbol{u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c}$$

(14.1.1) مثال

أوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int 5^{-3x}\,dx$

الحل :

$$\int 5^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int -3(5^{-3x})dx = -\frac{1}{3}\frac{5^{-3x}}{\ln 5} + c$$

2. $\int x6^{2x^2} dx$

الحل :

$$\int x6^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x6^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{6^{2x^2}}{\ln 6} + c$$

.2 إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فإننا نحصل القانون الاتي :

$$\int \boldsymbol{u'e^u\,dx = e^u + c}$$

مثال (15.1.1)

أوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int (x-1)e^{x^2-2x+1}\,dx$

الحل :

إذا كانت $u = x^2 - 2x + 1$ فإن $u' = 2x - 2 = 2(x-1)$ وبالتالي نحصل على

$$\int (x-1)e^{x^2-2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2(x-1)e^{x^2-2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int ue^u\,dx$$
$$= \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2-2x+1} + c$$

2. $\int (\cos x - 1)e^{\sin x - x}\,dx$

الحل :

إذا كانت $u = \sin x - x$ فإن $u' = \cos x - 1$ وبالتالي نحصل على

$$\int (\cos x - 1)e^{\sin x - x}\,dx = \int u'e^u\,dx = e^u + c$$
$$= e^{\sin x - x} + c$$

(16.1.1) بعض طرق التكامل الغير محدد

في بعض الأحيان لا يمكننا ايجاد قيمة التكامل مباشرة وذلك باستخدام مفهوم عكس المشتقة أو باستخدام القوانين الأساسية ، وذلك بسبب عدم معرفتنا لهذه المشتقة ، أو بسبب كون التكامل معطى في صورة يصعب علينا استخدام مفهوم عكس المشتقة أو القوانين الاساسية ، في هذه الحالة يجب علينا توصيل التكامل إلى شكل بسيط يمكن تكامله بسهولة ، لأجل ذلك سنقوم باستخدام بعض طرق التكامل الغير محدد التي سوف تساعدنا في الوصول بالتكامل إلى صورة يمكن من خلالها استخدام مفهوم عكس المشتقة أو استخدام القوانين الاساسية للتكامل الغير محدد ومن طرق التكامل الغير محدد الاتي :

1. التكامل بالتعويض

نستخدم طريقة التكامل بالتعويض لإيجاد التكاملات التي لا يمكن إيجادها باستخدام القانون مباشرة ، وذلك إذا كانت هذه التكاملات على أحد الصورتين الأتيتين :

1. $\int [F(x)]^n F'(x)\ \ g(x)\,dx$

2. $\int \frac{F'(x)}{F(x)}\, g(x)\,dx$

3. $\int u'u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

حيث c ثابت التكامل .

وسنوضح حل هذه التكاملات وذلك من خلال بعض الأمثلة.

(17.1.1) مثال

أوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int 6x^2(2x^3-6)^4\,dx$

الحل :

إذا كانت $u = 2x^3 - 6$ فإن $u' = 6x^2$ بالتالي فإن :

$$\int 6x^2(2x^3-6)^4dx = \int u\,'u^4dx = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(2x^3-6)^5}{5} + c$$

2. $\int (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx$

الحل :

إذا كانت $u = x^3 + 3x + 1$ فإن $u' = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1)$ بالتالي فإن :

$$\int (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(x^2+1)(x^3+3x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int u'\,u^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+3x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

3. $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$

الحل :

نفرض أن :

$$u = x+1 \rightarrow x = u-1$$

$$du = dx \ \rightarrow dx = du$$

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)^2(u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (u^2-2u+1)(u)^{\frac{1}{2}}\,du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

نعوض ب $u = x+1$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$$

4. $\int \frac{x}{x-1}dx$

الحل :

نفرض أن :

$$u = x - 1 \ \rightarrow x = u + 1$$

$$du = dx \ \rightarrow dx = du$$

$$\int \frac{x}{x-1}dx = \int \frac{u+1}{u}du = \int \left(1 + \frac{1}{u}\right)du$$

نعوض ب $u = x - 1$

$$= u + \ln|u| + c = x - 1 + \ln|x - 1| + c$$

2. التكامل بالتجزئة

تساعد طريقة التكامل بالتجزئة على إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ، الأمر الذي يسهل كثيراَ في حساب التكاملات المعقدة والتي لا يمكن إيجادها باستخدام مفهوم عكس المشتقة ، او باستخدام القوانين الاساسية للتكامل ، ولتوضيح هذه الطريقة نفرض دالتين قابلتين للاشتقاق $f(x)\ , g(x)$ ، من قانون المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين نجد أن :

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

فإن :

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)dx] - \int g(x)f'(x)\,dx$$

أو

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

وإذا وضعنا

$$u = f(x)\,, v = g(x) \rightarrow du = f'^{(x)}dx\,, dv = g'(x)dx$$

وبالتالي نحصل على قانون التكامل بالتجزئة وهو كالاتي :

$$\int udv = uv - \int v\,du$$

(18.1.1) مثال

أوجد قيمة التكاملات الاتية :-

1. $\int x \sin x\, dx$

الحل :

نفرض أن :

$$u = x \quad , \quad dv = \sin x\, dx$$

$$du = dx \;\; , \;\; v = -\cos x$$

باستخدام قانون التكامل بالتجزئة نحصل على

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c$$

2. $\int (x+1)e^{-x}\, dx$

الحل :

نفرض أن :

$$u = x + 1 \;\; , dv = e^{-x}dx$$

$$du = dx\,, v = -e^{-x}$$

باستخدام قانون التكامل بالتجزئة نحصل على

$$\int (x+1)e^{-x}\, dx = -(x+1)e^{-x} - \int -e^{-x}\, dx$$

$$= -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + c$$

3. طريقة إكمال مربع

نستخدم طريقة إكمال مربع إذا كانت التكاملات على أحد الصور الأتية :

1. $\int \frac{F'(x)}{[F(x)]^2 + bF(x)} dx$

2. $\int \frac{F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2 + bF(x)}} dx$

في هذه الصور نقوم بإكمال المربع حتى نصل بالتكامل إلى صورة من صور الدوال المثلثية العكسية ومن ثم نكامل باستخدام القانون مباشرة .

مثال (19.1.1)

أوجد قيمة التكاملات الاتية :-

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 - 1 + 2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1}$$

$$= \tan^{-1}(x-1) + c$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2 + 9}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2 + 9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x-1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{9}}}$$

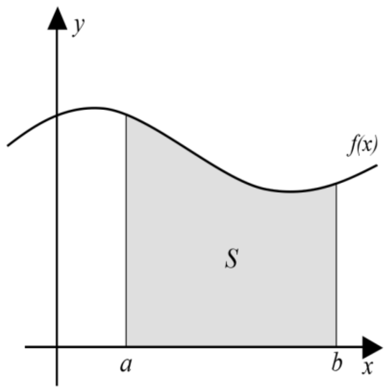
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^2}} = \int \frac{\frac{1}{3}dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + c$$

(2.1) التكامل المحدد (Definite Integral)

(1.2.1) تعريف

التكامل المحدد هو عملية تجميع لعناصر (أطوال ، مساحات ، حجوم) بطريقة معينة وقد قام العالم الالماني ريمان بتوضيح عملية الجمع هذه والتي تعرف باسمه (مجموع ريمان) وأثبت أن هذا المجموع ما هو في الحقيقة إلا التكامل المحدد أي انه يتضمن حساب مساحة منطقه محصورة بين منحنيات معينه كما موضح في الشكل التالي :-



(2.2.1) الرموز العلمية لعملية التكامل المحدد

اذا كانت $f(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ ومتصلة علي الفترة $[a,b]$ ، فإن عملية التكامل المحدد يرمز لها كالتالي :-

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

حيث أن a و b هي حدود التكامل ، حيث a يسمي الحد السفلي لتكامل و b يسمي الحد العلوي لتكامل .

(3.2.1) حساب التكامل المحدد باستخدام النظرية الاساسية للتكامل

إذا كانت $f(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ ومتصلة على الفترة $[a,b]$ فإن :-

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

(4.2.1) مثال

أوجد قيمة التكاملات الأتية :-

1. $\int_{2}^{3} (x^3 + x)\, dx$

الحل :

$$\int_{2}^{3} (x^3 + x)\, dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{2}^{3} = \frac{75}{4}$$

2. $\int_{2}^{4} 2(x+1) dx$

الحل :

$$\int_{2}^{4} 2(x+1)dx = (x^2 + 2x)\Big|_{2}^{4} = \big((16+8) - (4+4)\big) = 16$$

(5.2.1) خواص التكامل المحدد

1. إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فإن :

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{b} f(x)\, dx$$

2. إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فإن :

$$\int_{c}^{c} f(x)\, dx = 0$$

3. إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإن :

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = -\int_{b}^{a} f(x) dx$$

4. إذا كان $f(x) = k$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث k عدد حقيقي فإن :

$$\int_{a}^{b} k\,dx = k(b-a)$$

5. إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث k عدد حقيقي فإن :

$$\int_{a}^{b} kf(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

6. إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين متصلتين على الفترة $[a,b]$ فإن $f-g$ ، $f+g$ دالتين متصلتين فإن :

$$\int_{a}^{b} \big(f(x) \mp g(x)\big)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \mp \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

مثال (6.2.1)

اوجد قيمة التكاملات الاتية :-

1. $\int_{0}^{2} (2x+1)dx$

الحل :

$$\int_{0}^{2} (2x+1)dx = \int_{0}^{2} 2x\,dx + \int_{0}^{2} dx = \frac{2x^2}{2}\bigg|_{0}^{2} + x\bigg|_{0}^{2}$$

$$= (2^2 - 0^2) + (2-0) = 4 + 2 = 6$$

2. $\int_{4}^{4} (x+1)dx$

الحل :

$$\int_{4}^{4} (x+1)dx = \int_{4}^{4} x\,dx + \int_{4}^{4} dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{4}^{4} + x\bigg|_{4}^{4}$$

$$= \left(\frac{16}{2} - \frac{16}{2}\right) + (4 - 4)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

3. إذا كان $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$ فأوجد $\int_{\pi}^{0} \sin x \, dx$ باستخدام خواص التكامل ؟

الحل :

باستخدام الخاصية الثالثة للتكامل وهي كالاتي :

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$ نحصل على :

$$\int_{\pi}^{0} sin\, x\, dx = -\int_0^{\pi} sin\, x\, dx = -2$$

الباب الثاني

التكاملات المعتلة

(Improper Integrals)

من خلال دراستنا للتكامل المحدد عرفنا أن $\int_a^b f(x)dx$ حيث أن f دالة معرفة ومستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وبينما أنه إذا وجد هذا التكامل فإن الدالة f تكون محدودة على هذا التكامل .

في هذا الباب سنقوم بتعميم مفهوم التكامل المحدود إلى الحالة التي تكون فيها الدالة f معرفة على احد المجالات التالية : $[a,\infty)$ أو $(-\infty,b]$ أو $(-\infty,+\infty)$ وفي كل هذه الحالات يدعي التكامل بالتكامل المعتل من النوع الأول .

أما التكامل المعتل من النوع الثاني فهو تكامل على فترات محدودة ولكن الدالة f غير معرفة عند نقطة واحدة على الأقل داخل الفترة المغلقة $[a,b]$.

وسنقوم في هذا الباب بدراسة كلا من النوعين من التكاملات المعتلة من خلال فصلين كل منها على حدى .

(1.2) التكاملات المعتلة من النوع الاول

(Improper Integrals Of First Type)

(1.1.2) تعريف

التكاملات التي تكون علي الصورة $\int_a^b f(x)dx$ بحيث تكون لدينا $a=-\infty$ او $b=+\infty$ او كليهما أي ان احد حدود التكامل او الاثنين معاً لانهائي ، تسمي التكاملات في هذه الحالة بالتكاملات اللانهائية او التكاملات المعتلة . وتكون هذه التكاملات كالاتي :-

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx\,,\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\,,\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

ومثل هذه التكاملات تُحسب كالاتي :

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

وفي كل هذه الحالات إذا كانت النهاية موجودة فإنها تعتبر هي قيمة التكامل ونقول بأن التكامل المعتل متقارب وإذا كانت النهاية غير موجودة في هذه الحالة نقول بأن التكامل المعتل متباعد.

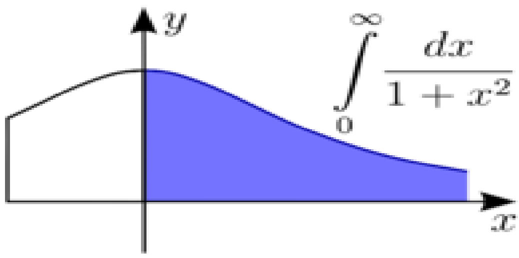
مثال (2.1.2)

اختبر تقارب او تباعد التكاملات الأتية :-

1. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

الحل :

نوضح هذا التكامل من خلال الشكل التالي :



نوجد قيمة هذا التكامل كالاتي :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\lim_{t\to\infty} \tan^{-1} x \Big|_{0}^{t} = \lim_{t\to\infty}[\tan^{-1} t - \tan^{-1} 0] = \frac{\pi}{2}$$

بما ان النهاية موجودة وتساوي $\frac{\pi}{2}$ فإن التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ متقارب إلى $\frac{\pi}{2}$.

2. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x} dx$

الحل :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} e^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} [-e^{-x}]_{0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{e^t} - \left(-\frac{1}{e^0}\right)\right] = 0 + 1 = 1$$

بما أن النهاية موجودة وتساوي1 فإن التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{1}{e^x} dx$ يكون متقارب الى 1 .

3. $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x} dx$

الحل :

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x} dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{1} \frac{1}{1+x}\, dx$$

نستخدم طريقة التعويض للحصول علي قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x} dx = \lim_{t\to-\infty} [ln(1+x)]_{t}^{1}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[ln\, 2 - ln\big(1+(t)\big)\right] = \infty$$

بما أن النهاية غير موجودة فإن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x} dx$ يكون متباعد .

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx$

الحل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx$$

$$+ \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx = \lim_{t\to-\infty} tan^{-1}(x-3)\Big|_{t}^{0}$$

$$+ \lim_{t\to+\infty} tan^{-1}(x-3)\Big|_{0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\to-\infty}(tan^{-1}(-3) - tan^{-1}(t-3))$$

$$+ \lim_{t\to\infty}(tan^{-1}(t-3) - tan^{-1}(-3)) = -\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

بما إن النهاية موجودة وتساوي π فإن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx$ يكون متقارب إلي π .

(3.1.2) خواص التكاملات المعتلة من النوع الاول

(properties Of Improper Integrals Of First Type)

1. إذا كان لدينا $0 \le f(x) \le g(x)$ لكل $x \ge a$ فإنه :

a. إذا كان $\int_a^\infty g(x)dx$ متقارب فإن $\int_a^\infty f(x)\,dx$ يكون متقارب ايضاً .

b. إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً فإن $\int_a^\infty g(x)\,dx$ يكون متباعداً ايضاً .

مثال (4.1.2)

اختبر تقارب أو تباعد التكامل الاتي :-

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x+e^{2x}}\, dx$$

الحل :

نعلم أن $x \le e^{x}$ لكل $x \in [1,\infty)$ وبالتالي يكون :

$x^2 < (e^{x})^2 = e^{2x}$ وبما أن $x \ge 1$ فإن $x^2 < e^{x^2} + x$ وبالتالي يكون

$$\frac{1}{x+e^{2x}} < \frac{1}{x^2}$$

حيث $x \ge 1$ وبما أن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ متقارب بالتالي فإن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x+e^{2x}}$ يكون متقارب وذلك حسب اختبار المقارنة .

2. إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ دالتان موجبتان وقابلتان للتكامل علي الفترة المغلقة والمحدودة $[a,b]$ وكانت $lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ عندئذ يكون $\int_a^\infty f(x)\, dx$ و $\int_a^\infty g(x)\, dx$ متقاربان معاً او متباعدان معاً.

3. إذا كان $\int_a^\infty f(x)\, dx$ متقارباً وكان d عدد حقيقي ، فإن $\int_a^\infty df(x)\, dx$ يكون متقارباً ايضاً ويكون $\int_a^\infty df(x)\, dx = d\int_a^\infty f(x) dx$.

اما إذا كان $\int_a^\infty f(x)\, dx$ متباعداً وكان $d \neq 0$ ، فإن $\int_a^\infty df(x)\, dx$ يكون متباعداً ايضاً .

4. إذا كان التكاملين $\int_a^\infty f(x)\, dx$ و $\int_a^\infty g(x)\, dx$ متقاربين ، فإن $\int_a^\infty [f(x) \mp g(x)]\, dx$ يكون متقارباً أيضاً ويكون :

$$\int_a^\infty [f(x) \mp g(x)]\, dx = \int_a^\infty f(x)\, dx \mp \int_a^\infty g(x)\, dx$$

5. إذا كان $\int_a^\infty f(x) dx$ متقارباً ، فإن $\int_\infty^\infty f(x) dx = 0$.

6. إذا كانت $\lim_{x\to\infty} F(x)$ موجودة ، فإن التكامل $\int_a^\infty f(x)\, dx$ متقارب ويحسب

كالاتي :

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\int_{a}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}(F(x) - F(a))$$

(5.1.2) مثال

اختبر تقارب او تباعد التكامل الاتي :-

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

الحل :

حسب خواص التكامل نستطيع ان نكتب التكامل كالاتي :

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

بما أن تكامل الاول هو تكامل محدود قيمته منتهية ، أما بالنسبة للتكامل الثاني $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$

فإن $x \in [1,\infty)$ فإن $x < x^2$ وبالتالي فإن :

$e^{-x^2} < e^{-x}$ وكذلك :

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}(-e^{-x})\Big|_{1}^{t} = \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

بما أن النهاية موجودة فإن التكامل المعتل $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ متقارب .

7. إذا كانت الدالة f متصلة علي الفترة $[a,\infty)$ وكان $x = g(u)$ حيث g دالة تزايديه على $[a,\infty)$ و $a = g(a)$ ، فإنه إذا تقارب احد التكاملين

$\int_a^\infty f(g(u))\,g'(u)\,du$ و $\int_a^\infty f(x)\,dx$ فإن الاخر يكون متقارباً ايضاً ويكون كالاتي :

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(g(u))g'(u)\,du$$

مثال (6.1.2)

اختبر تقارب او تباعد التكامل الاتي :-

$$\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{1-e^x}dx$$

الحل :

الدالة$f(x)=\frac{e^{2x}}{1-e^x}$ دالة متصلة علي $[0,\infty)$.

إذا كان $u=1-e^x \rightarrow e^x=1-u$

$$du=-e^x dx \ \rightarrow dx=-\frac{du}{e^x}$$

وبذلك يكون :

$$\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{1-e^x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t -\frac{1-u}{u}du=\lim_{t\to\infty}\int_0^t -\left(\frac{1}{u}-1\right)du$$

$$=\lim_{t\to\infty}[-\ln|u|+u]\,{}_0^t=\lim_{t\to\infty}[-\ln|1-e^x|+1-e^x]\,{}_0^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}[(-\ln|1-e^t|+1-e^t)+(\ln|1-e^0|-1+e^0)]=0$$

بما أن النهاية موجودة و تساوي 0 فإن التكامل المعتل متقارب .

8. إذا كانت u,v دالتان متصلتان علي $[a,\infty)$ ولهما مشتقة متصلة علي $[a,b]$ وإذا كان $\lim_{x\to\infty} u(x)v(x)=k$ فانة إذا كان أحد التكاملين $\int_a^\infty u\,dv$ و $\int_a^\infty v\ du$ متقارباً فإن الاخر يكون متقارباً ايضاً ويكون :

$$\int_a^\infty udv=k-u(a)v(a)-\int_a^\infty v\,du$$

مثال (7.1.2)

أوجد قيمة التكامل المعتل $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ لكل $n = 0,1,2,3$ ؟

الحل :

عندما $n = 0$ فإن :

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 = 0 \times 1 = 0!$$

عندما $n = 1$ فإن :

$$\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 = 0 \times 1 = 1!$$

عندما $n = 2$ فإن :

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{=x}\, dx = 0 + 2 = 2!$$

عندما $n = 3$ فإن :

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx = -x^3 e^{-x}\Big|_0^\infty + 3\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = 0 + 3 \times 2 = 3!$$

وهكذا نصل إلي النتيجة الاتية :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!$$

.9 إذا كانت الدالة f متصلة وتناقصية وموجبة علي الفترة $[a,\infty)$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ والتكامل $\int_a^\infty f(x)\, dx$ متقاربان معاً او متباعدان معاً .

مثال (8.1.2)

اختبر تقارب او تباعد المتسلسلة الاتية :-

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\, ln\, n}$$

الحل :

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\ln|\ln x|]_{2}^{t} = \lim_{t\to\infty} [\ln|\ln t| - \ln|\ln 2|]$$

$$= \ln \ln \infty - \ln \ln 2 = \infty - 0 = \infty$$

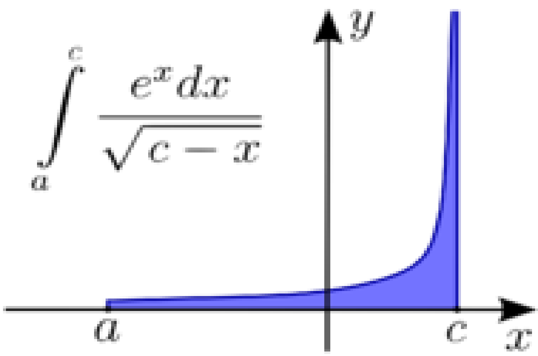
بما أن النهاية غير موجودة بالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ تكون متباعدة .

(2.2) التكاملات المعتلة من النوع الثاني

(Improper Integrals Of Second Type)

تعريف (1.2.2)

التكاملات التي تكون عندها الفترة المراد التكامل عليها محدودة ولكن الدالة تكون غير معرفة عند نقطة داخل تلك الفترة تسمى بالتكاملات المعتلة ، وذلك كما موضح في الشكل التالي :



ويقسم ذلك كالاتي :

1. إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b)$ ولكن ليست معرفة (ليست متصلة) عند النقطة a ويكون كالاتي :

$$\int_a^b f(x) = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

ويمكن إيجاد هذا التكامل كالاتي :

إذا كانت نهاية التكامل $\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$ موجودة وتساوي عدد حقيقي فإننا نقول بأن

التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\, dx$ متقارباً .

وإذا كانت نهاية التكامل $\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$ غير موجودة أو تساوي $+\infty$, $-\infty$ فإن

التكامل المعتل $\int_a^b f(x)$ يكون متباعداً .

مثال (2.2.2)

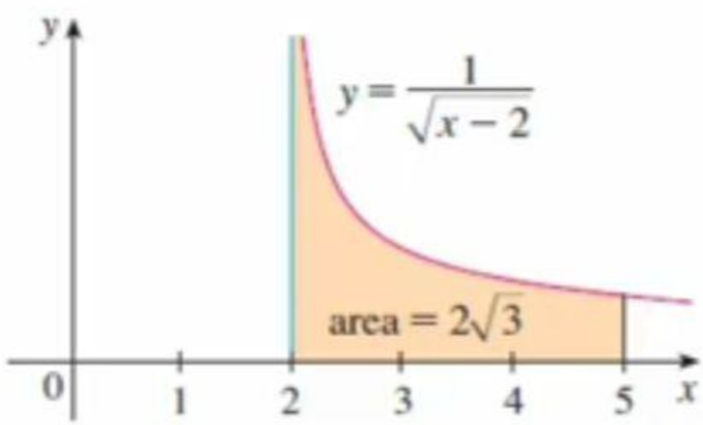
اختبر تقارب او تباعد التكاملات الاتية :-

1. $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

الحل :

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_t^5 = \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{t-3}\right) = 2\sqrt{3}$$



بمأن النهاية موجودة وتساوي $2\sqrt{3}$ فإن التكامل المعتل $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$ يكون متقارب .

2. $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

الحل :

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \int_t^{16} x^{-\frac{1}{4}}dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \Big|_t^{1}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{4}{3}(16)^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}(t)^{\frac{3}{4}}\right] = \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3}$$

بمأن النهاية موجودة وتساوي $\frac{32}{3}$ فإن التكامل المعتل $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ يكون متقارب .

2. إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b)$ وليست معرفة (ليست متصلة) عند النقطة b، فإن التكامل المعتل يكون كالاتي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

ويمكن إيجاد هذا التكامل كالاتي :

إذا كانت نهاية التكامل $lim_{t\to b^-} \int_a^b f(x)\,dx$ موجودة وتساوي عدد حقيقي ، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون متقارب .

وإذا كانت النهاية التكامل $\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ غير موجودة أو تساوي $-\infty\,,+\infty$ فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون متباعداً .

مثال (3.2.2)

اختبر تقارب او تباعد التكاملات الاتية :-

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\, dx$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\, dx = \lim_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^t \sec x\, dx$$

$$= \lim_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \ln|\sec x + \tan x| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} [\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1] = \infty$$

بمان النهاية غير موجودة فإن التكامل المعتل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\, dx$ يكون متباعد .

2. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$

الحل :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \lim_{t \to 1} \int_0^t \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$$

$$= \lim_{t \to 1} \int_0^t \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\, dx = \lim_{t \to 1} \int_0^t \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \lim_{t \to 1} \left[\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^t \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \right]$$

$$= \lim_{t \to 1} \left[\sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} \right] \Big|_0^t$$

$$\lim_{t\to 1}\left[\left(\sin^{-1} t - \sqrt{1-x^2}\right) - \left(\sin^{-1} 0 - \sqrt{1}\right)\right] = \frac{\pi}{2} + 1$$

إذن التكامل المعتل $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ يكون متقارب .

3. إذا كانت الدالة f غير معرفة عند النقطة c بحيث أن $a < c < b$ وتكون فترة هذا التكامل هي $[a,b]$ ،فإن التكامل يكون كالاتي :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\, dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\, dx$$

ويمكن إيجاد هذا التكامل كالاتي :

إذا كان كلاً من التكاملين $\int_a^c f(x)\, dx$ و $\int_c^b f(x)\, dx$ متقاربين ، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\, dx$ يكون متقارباً ، وبالتالي يكون التكامل كالاتي :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to c}\int_a^t f(x)\, dx + \lim_{t\to c}\int_t^b f(x)\, dx$$

وخلاف ذلك يكون التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\, dx$ متباعد .

مثال (4.2.2)

اختبر تقارب او تباعد التكامل الاتي :-

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

الحل :

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^-}\int_{-2}^{t} \frac{dx}{x^2} + \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_{-2}^{t}\right) + \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_{t}^{1}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right) + \lim_{t\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{t}\right) = \infty$$

بما أن النهاية غير موجودة فإن التكامل المعتل متباعد .

(5.2.2) خواص التكاملات المعتلة من النوع الثاني

(Properties of improper integrals of second Type)

سندرس خواص التكامل المعتل علي التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ عندما تكون $x = b$ هى النقطة التي تكون الدالة غير معرفة عندها وستكون تعميم لباقي الحالات .

1. إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx$ متقارباً وكان d عدداً حقيقياً ، فإن التكامل $\int_a^b df(x)dx$ يكون متقارباً أيضاً ويكون $\int_a^b df(x)dx = d\int_a^b f(x)dx$.

أما إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx$ متباعداً وكان $d \neq 0$ ، فإن التكامل $\int_a^b df(x)dx$ متباعداً .

2. إذا كان التكاملين $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)dx$ متقاربين ، فإن :

$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx$ يكون متقارباً ويكون التكامل كالاتي :

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. إذا كان التكاملين $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ متقاربين وكانت $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in (a,b]$ ، فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

4. إذا كان التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ متقارباً ، فإن $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

مثال (6.2.2)

إذا كان : $f(x) = \frac{1}{x^3}\,; g(x) = x^2$ فإن :

$$f(x)g(x) = \frac{1}{x}$$

والتكامل $\int_0^1 x^3 dx$ تكامل معتل متقارب

ولكن :

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx$$

يكون تكامل معتل متباعد .

من المثال السابق نلاحظ أن حاصل ضرب دالتين قابلتين للتكامل المعتل من النوع الثاني قد لا تكون قابلة للتكامل المعتل من النوع الثاني .

مثال (7.2.2)

اختبر تقارب او تباعد التكامل الاتي :-

1. $\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^3}$

الحل :

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^3} = \lim_{t\to 2}\int_0^t \frac{dx}{(2-x)^3} = \lim_{t\to 2}\left[-\frac{1}{2(2-x)^2}\right]\Big|_0^t$$

$$\lim_{t\to 2}\left[-\frac{1}{2(2-t)^2}+\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{8}$$

بمان النهاية موجودة فإن التكامل المعتل $\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^3}$ يكون متقارب .

2. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}}$

الحل :

نلاحظ أن الدالة $f(x)=\frac{1}{(1-x)^{1/3}}$ دالة موجبة على $[0,1]$ وأن $x=1$ خط تقارب عمودي لهذه الدالة .

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-x}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

إذن التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}}$ يكون متقارب .

5. إذا كان $x=0 \le f(x) \le g(x)$ خط تقارب عمودي للدالتين f,g فإنه :

a. تقارب $\int_a^b g(x)dx$ يؤدي الي تقارب $\int_a^b f(x)\,dx$.

b. تباعد $\int_a^b f(x)dx$ يؤدي الي تباعد $\int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx$.

مثال (8.2.2)

اختبر تقارب او تباعد التكامل الآتي :-

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$$

الحل :

إذا كانت $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$ ، فإنه يكون لدينا :

$$\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

وبما أن التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ متقارب ، فإن التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ يكون متقارباً ايضاً .

6. إذا كانت $f(x) \geq 0$ وكذلك $g(x) \geq 0$ علي $[a, b]$ ويكون لدالتين خط تقارب عمودي عند $x = b$.

فإنه إذا كان $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

فإن التكاملين $\int_a^b g(x)\, dx$ و $\int_a^b f(x)\, dx$ متقاربين معاً أو متباعدين معاً .

مثال (9.2.2)

اختبر تقارب أو تباعد التكامل الاتي :-

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1 + x^2)}$$

الحل :

نفرض أن $f(x) = \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$ ، $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ ، إذن :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{1 + x^2} = 1$$

وبمأن التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ متقارب ، فإن التكاملين $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$ ، $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ متقاربين .

وبالتالي فإن التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$ يكون متقارب .

الباب الثالث

دالتا جاما وبيتا

(Gamma and Beta Functions)

(1.3) مقدمة

عرفت دالة جاما من قبل السويسري أويلر (Euler، 1783 -1707) عام 1868م وعرفت دالة بيتا من قبل الانجليزي واليس (Wallis) عام 1655 م وأويلر عام 1730م ، وسماها الفرنسي لجندر (Legendre) دالة أويلر عام 1826 م وسميت دالة بيتا من قبل الفرنسي بنيت عام 1839 م حيث انه نظراً لوجود جوانب متقدمة في الرياضيات التي تحتاج إلي دوال اخري غير الدوال الاولية والتي بواسطتها نستطيع حساب تكاملات صعبة او حل معادلات تفاضلية معقدة ، لذلك ظهرت الحاجة الي مثل تلك الدوال وذلك لما تلعبه من دوراً مهماً في نظرية تقريب الدوال فهي تمتلك من الخصائص والمهارات والآليات الرياضية الفائقة القدرة علي التبسيط والاختصار وذلك بتسهيل الكثير من الحسابات العلمية المعقدة وتقدم طريقة ناجحة لتوفير الوقت والجهد عند الحل . ويضم هذا الباب فصلين عرفنا فيهما دالتي جاما وبيتا ، ودرسنا خواصهما الأساسية وكيفية استخدامها لحل بعض التكاملات المعتلة .

(1.1.3) تعريف دالة جاما (Gamma Function)

تعرف دالة جاما ويرمز لها بالرمز $\Gamma(x)$ علي انها التكامل المعتل الذي يعطي بالعلاقة :

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt \quad ; \; x > 0$$

ويعرف هذا التكامل ايضاً بتكامل أويلر من النوع الثاني

(Euler Integral of second kind) .

(2.1.3) خصائص دالة جاما

(Properties Of Gamma Function)

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall\, x \neq 0$

2. $\Gamma(x+1) = x!$ و إذا كانت x عدداً صحيحاً موجبًا فإن

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(3.1.3) مثال

احسب قيمة الاتي :-

1. $\Gamma\,(4)$ **2.** $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$ **3.** $\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)}$

4. $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)$ **5.** $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ **6.** $\frac{\Gamma(8/3)}{\Gamma(2/3)}$

الحل :

1. $\Gamma(4) = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

2. $$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2 \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 1} = 30$$

3. $$\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\big(1 + (1/2)\big)}{\Gamma(1/2)} =$$ **4.** $$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{-1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

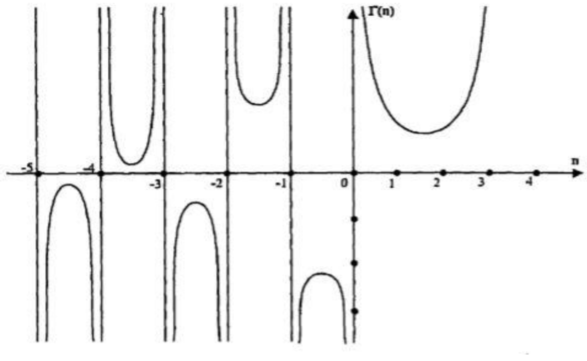
5. $$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

6. $$\frac{\Gamma\,(8/3)}{\Gamma\,(2/3)} = \frac{\Gamma\,(1 + 5/3)}{\Gamma\,(2/3)} = \frac{5/3\ \Gamma\,(5/3)}{\Gamma\,(2/3)}$$

$$= \frac{5/3\ \Gamma(1 + 2/3)}{\Gamma(2/3)} = \frac{5/3\ \times\ 2/3\ \Gamma(2/3)}{\Gamma\,(2/3)} = \frac{10}{9}$$

وبإعطاء قيم اخرى إلى x يمكننا من خلالها رسم منحنى جاما وهو كالاتي :



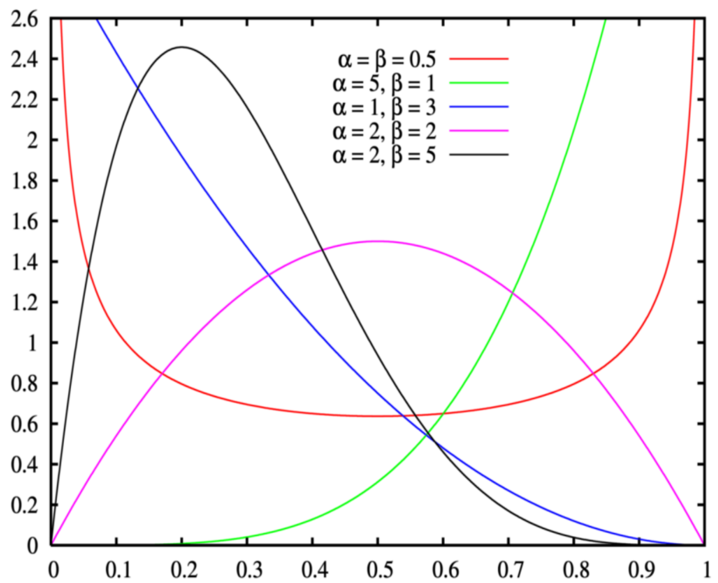
(4.1.3) تعريف دالة بيتا (Beta Function)

تعرف دالة بيتا ويرمز لها بالرمز $\beta(x,y)$ علي انها التكامل المعتل الذي يعطى بالعلاقة :

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \qquad ; \quad x > 0 \;\; , y > 0$$

حيث يعرف هذا التكامل ايضاً بتكامل أويلر من النوع الاول (Euler Integral Of The First Kind) .

ويمكن توضيح منحنى دالة بيتا لبعض القيم كالاتي :



(5.1.3) خصائص دالة بيتا

(Properties Of Beta Function)

1. دالة بيتا دالة تقاربية (Convergent) لكل $x > 0, y > 0$.
2. دالة بيتا دالة متماثلة (symmetric Function) بالنسبة x, y أي أن

$. \beta(x, y) = \beta(y, x)$

3. يمكن تعرف دالة بيتا من خلال الدوال المثلثية (Trigonometric Function) كالاتي :

$$\beta(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{2x-1}\,(\cos\varphi)^{2y-1}\;d\varphi$$

(6.1.3) العلاقة بين دالة جاما وبيتا

تكون العلاقة بين دالة جاما وبيتا في الصورة التالية :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad , \qquad x > 0 \;, y > 0$$

ويمكن إثبات هذه العلاقة كالاتي :

بوضع $t = z^2$ في دالة جاما $\Gamma(x)$ ، نجد أن :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{2x-2} e^{-z^2} 2z\, dz = 2\int_0^{\infty} z^{2x-1} e^{-z^2}\, dz$$

وكذلك يمكن اعتبار ان :

$$\Gamma(y) = 2\int_0^{\infty} w^{2y-1} e^{-w^2}\, dw$$

$$\therefore \Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} z^{2x-1} w^{2y-1} e^{(z^2+w^2)}\, dz dw$$

وباستخدام الاحداثيات القطبية :

$$z = \rho\cos\varphi \quad , w = \rho\sin\varphi \;, \qquad dzdw = \rho d\rho d\varphi$$

نحصل على الاتي :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}(\rho\cos\varphi)^{2x-1}(\rho\sin\varphi)^{2y-1}e^{-\rho^2}\, zdzd\varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\rho^{2x+2y-2+1}\, e^{-\rho^2}\cos\varphi^{2x-1}\sin\varphi^{2y-1}\, d\rho d\varphi$$

$$= 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi^{2x-1}\sin\varphi^{2y-1}\, d\varphi\right)\left(\int_0^{\infty}\rho^{2(x+y)-1}e^{-\rho^2}\, d\rho\right)$$

وإذا وضعنا $\rho^2 = t$ في التكامل

$$\int_0^{\infty}\rho^{2(x+y)-1}e^{-\rho^2}d\rho$$

إذن فإن :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\cdot\frac{1}{2}\beta(x,y)\cdot\frac{1}{2}\Gamma(x+y) = \beta(x,y)\Gamma(x+y)$$

وهكذا نحصل على :

$$\beta\,(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

مثال (7.1.3)

أحسب قيمة الاتي :-

1. $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ **2.** $\beta(1,1-x)$ **3.** $\beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

الحل :

1. $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi$

$$\mathbf{2.}\quad \beta(1,1-x)=\frac{\Gamma(1)\Gamma(1-x)}{\Gamma(2-x)}=\frac{\Gamma(1-x)}{(1-x)\Gamma(1-x)}=\frac{1}{1-x}$$

$$\mathbf{3.}\quad \beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

(2.3) استخدام دالتي جاما وبيتا لحل بعض التكاملات المعتلة

قد يكون حساب بعض التكاملات المعتلة صعباً في بعض الحالات أو يأخذ كثير من الوقت والجهد لأجل ذلك سنقوم باستخدام دالتي جاما وبيتا وذلك لما تمتلكه من القدرة علي التبسيط والاختصار لحل مثل هذه التكاملات ، وسنوضح ذلك من خلال بعض الأمثلة .

(1.2.3) مثال

احسب قيمة التكاملات الاتية :-

$$\mathbf{1.}\quad \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt$$

الحل :

$$x-1=3\to x=4$$

$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3!=3.2.1=6$$

$$\mathbf{2.}\quad \int_0^1 t^4(1-t)^6\, dt$$

الحل :

نفرض أن :

$$x-1=4\to x=5$$

$$y-1=6\ \to y=7$$

وعلية فإن :

$$\int_0^1 t^4(1-t)^{-6}dt=\beta(5,7)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(7)}{\Gamma(12)}$$

$$= \frac{\Gamma(5)\Gamma(7)}{\Gamma(12)} = \frac{4!\,6!}{11!} = \frac{1}{2310}$$

3. $\int_0^{\pi} \cos\theta^4 \, d\theta$

الحل :

نفرض أن :

$$2x - 1 = 0 \quad , 2y - 1 = 4$$

نجد أن :

$$x = \frac{1}{2} \quad , y = \frac{5}{2}$$

وبالتالي فإن :

$$\int_0^{\pi} \cos\theta^4 \, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^4 \, d\theta = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{8\pi}{3}$$

4. $\int_0^{1} x^3(1-x)^7 \, dx$

الحل :

$$\int_0^{1} x^3(1-x)^7 \, dx = \beta(4,8) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(8)}{\Gamma(12)}$$

$$= \frac{3! \times 7!}{11!} = \frac{1}{1320}$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^9 \cos\theta^5 \, d\theta$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^9 \cos\theta^5 \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^{2\times5-1} \cos\theta^{2\times3-1} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\beta(5,3) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(3)}{2\Gamma(5+3)} = \frac{4!\times 2!}{2\times 7!} = \frac{1}{210}$$

6. $\int_0^{\infty} \frac{x^{-2/3}}{1+x} dx$

الحل :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-2/3}}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{(1/3)-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

7. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

الحل :

نفرض أن $x^3 = t$. فإن :

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \int_0^{1} (1-t)^{\frac{-1}{3}} \frac{1}{3} t^{\frac{-2}{3}} \, dt = \frac{1}{3}\int_0^{1} t^{\frac{-2}{3}} (1-t)^{\frac{-1}{3}} \, dt$$

$$= \frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^6 \, d\theta$

الحل :

$$2x-1=6 \quad ,2y-1=0 \qquad \to x=\frac{7}{2}\,,y=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^6 \, d\theta = \frac{\beta\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(4)} = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(4)}$$

$$=\frac{5\pi}{32}$$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^6 \, d\theta$

الحل :

نفرض أن :

فإن : , $2n-1=6\,,2m-1=0 \ \to n=\frac{7}{2}\,,m=\frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^6 \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^6 \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{32}$$

10. أثبت أن :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

الإثبات :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta^{\frac{-1}{2}}\, d\theta$$

حيث أن $2m-1=\frac{-1}{2}$, $2n-1=\frac{1}{2}$ ومنها نجد أن $m=\frac{1}{4}$, $n=\frac{3}{4}$

$$=\frac{\beta\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)}{2}=\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{2\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})}=\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{2}$$

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi.\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

b. $\int\limits_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}dx=\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

الإثبات :

نفرض أن : $x^3=8y$ أو $x=2y^{\frac{1}{3}}$ وعلى ذلك فإن : $dx=\frac{2}{3}y^{\frac{-2}{3}}dy$

عندما $x=0$ فإن $y=0$, عندما $x=2$ فإن $y=1$ وبالتالي فإن :

$$\int\limits_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}dx=\int\limits_0^1 2y^{\frac{-1}{3}}\sqrt[3]{8-8y}\ \frac{2}{3}\ y^{\frac{-2}{3}}dy=\frac{8}{3}\int\limits_0^1 y^{\frac{-1}{3}}(1-y)^{\frac{1}{3}}dy$$

$$\frac{8}{3}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}\ \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{8}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}\ \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

c. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad ;\ 0<p<1$

الإثبات :

نفرض أن $y=\frac{x}{1+x}$ أو $x=\frac{y}{1-y}$ فإن $dx=\frac{dy}{(1-y)^2}$

وعندما $x=0$ فإن $y=0$ وعندما $x=\infty$ فإن $y=1$.

وبالتالي فإن :

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int\limits_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}\,dy=\ \beta(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}$$

$$= \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta^p \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^p \, d\theta$

الإثبات :

1. التكامل يساوي $\frac{\pi}{2}\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots p}$. إذا كانت p عدداً صحيحاً موجباً زوجياً .

2. التكامل يساوي $\frac{\pi}{2}\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(p-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots p}$. إذا كانت p عدداً صحيحاً موجباً فردياً .

نفرض أن $2y-1=p$, $2x-1=0$ نحصل علي :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta^p \, d\theta = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(p+1)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left[\frac{1}{2}(p+2)\right]}$$

1. إذا كانت $p=2r$ فإن التكامل يساوي

$$\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(r+1)} = \frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{2r(r-1)\cdots 1}$$

$$\frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 1}{2r(2r-2)\cdots 2}\ \frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\ (2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}\ \frac{\pi}{2}$$

2. إذا كانت $p=2r+1$ فإن التكامل يساوي

$$\frac{\Gamma(r+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)} = \frac{r(r-1)\cdots 1\cdot\sqrt{\pi}}{2\left(r+\frac{1}{2}\right)(r-1)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+1)}$$

وفي كلتا الحالتين $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta^p \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^p \, d\theta$ وذلك بوضع $\theta = \pi/2 - \emptyset$

$$\textbf{11}.\ \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$$

الحل :

نفرض ان $y^4 = x$ وعلى ذلك فإن : $4y^4 dy = dx$ وبالتالي فإن :

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{4}}}{1+x}dx = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

$$\textbf{12}.\ \int_0^1 y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

الحل :

نفرض أن $y^2 = a^2x$ ، فإن $y = ax^{\frac{1}{2}}$ ، و بالتالي فإن :

$$\int_0^1 y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = \int_0^1 \left(ax^{\frac{1}{2}}\right)^4 a(1-x)^{\frac{1}{2}} a x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{a^6}{2}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{a^6}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)}$$

$$\frac{a^6}{2}.\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\pi}{3!} = \frac{\pi a^6}{32}$$

$$\textbf{13}.\ \int_0^\infty \sqrt{y}\,e^{-y^3}dy$$

الحل :

نفرض أن $y^3 = t\,, 3y^2dy = dt$, فإن :

$$\int_0^\infty \sqrt{y}\,e^{-y^3}dy = \int_0^\infty \sqrt{t^{\frac{1}{3}}}\,e^{-t}\,.\frac{1}{3}t^{\frac{-2}{3}}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-u}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-u}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

14. $\int_0^\infty 3^{-4x^2} dx$

الحل :

بما أن $3^{-4x^2} = \left(e^{\ln 3}\right)^{-4x^2}$ وذلك لأن $3 = e^{\ln 3}$ ومنها نجد أن

$3^{-4x^2} = e^{-4x^2 \ln 3}$ وبوضع $(4\ln 3)x^2 = u$ وبالتالي نجد أن :

$$x = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\ln 3}} \qquad , \quad dx = \frac{u^{\frac{-1}{2}}}{4\sqrt{\ln 3}} du$$

وعليه فإن :

$$\int_0^\infty 3^{-4x^2} dx = \int_0^\infty e^{-u} \cdot \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{\ln 3}}\right) du = \frac{1}{4\sqrt{\ln 3}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}$$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

الحل :

بوضع $-\ln x = u \;\; , \;\; x = e^{-u} \;\; , \;\; dx = -e^{-u} du$

ولكن $\lim_{x\to 1} u = 0 \;\; , \;\; \lim_{x\to 0} u = \infty$ وبالتالي فإن :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = -\int_\infty^0 \frac{e^{-u}\, du}{u^{\frac{1}{2}}} = \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}} e^{-u}\, du = \sqrt{\pi}$$

16. $\int_{0}^{\infty} x^6 e^{-2x} dx$

الحل :

نفرض أن $u = 2x$, فإن :

$$\int_{0}^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^6 e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2^7}\int_{0}^{\infty} u^6 e^{-u} du = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

17. $\int_{0}^{\infty} t^{\frac{-3}{2}}(1 - e^{-t})dt$

الحل :

إن عملية تقسيم هذا التكامل لا تعطي شيئاً ، لأن الجزء الأول $\int_0^\infty t^{\frac{-3}{2}}\, dt$ متباعدة عندما $t \to 0^+$. إذاً سنقوم باستخدام التكامل بالتجزئة و نفرض أن :

$$u = 1 - e^{-t} \quad , \quad t^{\frac{-3}{2}} dt = dv$$

$$\int_{0}^{\infty} t^{\frac{-3}{2}}(1 - e^{-t})dt = \lim_{b\to\infty}\left[-2t^{\frac{-3}{2}}(1 - e^{-t})\right]_0^b + 2\int_{0}^{\infty} t^{\frac{-1}{2}} e^{-t}\, dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{-1}{2}}\, dt = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}$$

18. $\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$

الحل :

باستخدام التحويل $x = 2t - 1$ تتحول المنطقة $[-1, 1]$ إلي المنطقة $[0, 1]$ وعليه فإن :

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{1+2t-1}{1-2t+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2dt = 2\int_{0}^{1} \frac{(2t)^{\frac{1}{2}}}{(2-2t)^{\frac{1}{2}}} dt$$

$$= 2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,(1-t)^{\frac{-1}{2}}\,dt = 2\beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = \pi$$

19. $\int_0^1 x\,(1-x^3)^{\frac{1}{3}}dx$

الحل :

نفرض أن $x^3 = u$. فإن :

$$\int_0^1 x\,(1-x^3)^{\frac{1}{3}}dx = \int_0^1 u^{\frac{1}{3}}(1-u)^{\frac{-2}{3}}\cdot\frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 u^{\frac{1}{3}}(1-u)^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{3}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}\pi}{27}$$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^4\cos\theta^5\,d\theta$

الحل :

نفرض أن $2n-1=4$ و $2m-1=5$ نجد أن $n=\frac{5}{2}$ و $m=3$ ، فإن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^4\cos\theta^5\,d\theta = 2\beta\left(\frac{5}{2},3\right) = 2\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{11}{2})} = \frac{8}{315}$$

ملخص

تحدثنا في هذا المشروع عن التكامل بوجه عام والتكامل المعتل بوجه خاص حيث تناولنا في هذا المشروع مفاهيم عدة وذلك من خلال ثلاثة أبواب بحيث تناولنا في **الباب الاول** التكامل بصورة عامة وذلك من خلال أنواعه مصحوبة كل منها ببعض التعريفات والمفاهيم الأساسية وكذلك الصيغة العامة وبعض الصيغ القياسية الأخرى وذلك لإيجاد التكامل في كل نوع من أنواعه مصحوبه كل منها ببعض الأمثلة .

أما الباب الثاني فقد تناولنا فيه التكامل المعتل وذلك من خلال أنواعه مصحوبه كل منها ببعض الخواص والأمثلة .

أما الباب الثالث فقد تناولنا فيه مقدمة عن دالتا جاما وبيتا مصحوبة كل منها ببعض الخواص والأمثلة ، ومن ثم تناولنا فيه كيفية استخدام دالتي جاما وبيتا لحل بعض التكاملات المعتلة .

الخاتمة

لقد درسنا في هذا المشروع المفاهيم المتعلقة بالتكامل بوجه عام والتكامل المعتل بوجه خاص وذلك من خلال ثلاثة أبواب ، حيث قدمنا في الباب الأول التكامل بصورة عامة وذلك من خلال أنواعه مصحوبة كل منها ببعض التعريفات والمفاهيم الأساسية ، وكذلك الصيغة العامة وبعض الصيغ القياسية الأخرى مصحوبة كل منها ببعض الأمثلة ، وفي الباب الثاني قدمنا فيه التكامل المعتل وذلك من خلال أنواعه مصحوبة كل منها ببعض الخواص والأمثلة ، وفي الباب الثالث قدمنا فيه صورة مقدمة عن دالتا جاما وبيتا ومن ثم كيفية استخدام دالتي جاما وبيتا لحل بعض التكاملات المعتلة .

وفي ختام هذا المشروع أقول : هذا ما منى الله به علي ، ثم ما وسعه الجهد ، و سمح به الوقت وتوصل إليه الفهم المتواضع ، فإن أصبت فمن الله ، وإن أخطأت فمن نفسي والشيطان وأستغفر الله ، وحسبي إنني قد حاولت التسديد ، وبذلت الجهد ما استطعت إلي ذلك سبيلا ؛ غير أنني موقنة بأن مالا يدرك كله لا يترك جله كما أسال الله العظيم بمنه وفضله أن يجعل هذا العمل خالصاً لوجهه الكريم ، وأن ينفعني بذلك ، و أن ينفع به ، إنه علي ذلك قدير وصلى الله علي نبينا محمد وعلى آلة و صحبه أجمعين .

المراجع

1/ اساسيات التفاضل والتكامل وتطبيقاتها

تأليف : نادية إسماعيل البرقلي ، رقم الإيداع : 2009/967 ، الطبعة الأولى .

2/ الدوال الخاصة وبعض تطبيقاتها

تأليف : أ. د. فالح بن عمران بن محمد ، أ.د محمد بن عبدالله بن أحمد ،

رقم الإيداع 1429/1868 .

3/ الرياضيات المتقدمة للمهندسين والعلميين

سلسلة شوم ، د. موراي ر . شبيجل ،الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

القاهرة – مصر .

4/ التحليل الحقيقي

تأليف : د. رمضان محمد جهيمة ، الطبعة الثانية ، دار الكتب الوطنية / بنغازي - ليبيا

رقم الإيداع (4387/ 2002) .

5 / التفاضل والتكامل

تأليف : د. رمضان محمد جهيمة ، د. أحمد عبد العالي هب الريح ، الطبعة الثالثة .