وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة طرابلس كلية التربية – جنزور

قسم الرياضيات

بحث مقدم لنيل درجة البكالوريس في الرياضيات بعنوان:

الخواص الجبرية والتبولوجية للأعداد الحقيقية

إعداد الطالب:

محمد عمران الهادي المسلاتي

إشراف:

الأستاذة: ريم عياد عريبي

العام الدراسي 2022-2023

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿قالوا سبحانك لا علم لنا إلا ما

علمتنا إنك أنت العليم الحكيم﴾

البقرة-الاية (الواحدة والثلاثون)

الإهداء

بسم الله والصلاة والسلام علي نبي الله سيدنا محمد وعلي ألهِ وصحبه أجمعين وبعد ......

أهدي هذا العمل المتواضع إلي كلٍ من:

انتظرا هذه اللحظة واللذين قالالله فيهما:

﴿وقل ربي إرحمهما كما ربياني صغيرا﴾ : **أبي** (الغالي) و**أمي** (الحنون)

ومنَ كان لي سندٌ بعد الله عز وجل، وعاش معى كل اللحظات، حلوها ومرها :

أخي(العزيز)

والاتي لادنيا تقارن بهن، ولاوطناً يغني عنهن، والعالم يحتاج قلوباً كطهر قلوبهن :

أخواتي (العزيزات)

وإلي كل من ساندني في هذه الحياة، وكان سبباً بعد الله عز وجل في وصولي إلي هذا المكان:

أصدقائي

والي كل من علمني حرفا، فكان لي نوراً ينير لي مسيرة العلم والنجاح وأخص بالذكر

الأستاذ: **عبد السلام المسلاتي**، أسأل الله أن يحفظه من كل مكروه.

الباحث

الشكر والتقدير

نحمد الله عز وجل ونشكره، الذي وفقنا في إتمام هذا البحث العلمي، وألهمنا الصحة والعافية والعزيمة، فالحمد **لله** حمداً كثيراً

نقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى الأستاذة المشرفة: (**ريم عياد عريبي**) على كل ما قدمته لي من معلومات قيمة، وأشكر أيضاً كافة أعضاء هيئة التدريس في قسم الرياضيات، وأخص بالشكر الدكتور (**سعد أحمد**) والأستاذة (**عبير خليل**).

وأقدم بجزيل الشكر والتقدير الي:

الدكتورة (**مبروكة أبو القاسم التويجر**) من قسم اللغة العربية، والأستاذة (**إيمان صالح أبو خشيم**) رئيسة قسم الرياضيات في كلية التربية قصر بن غشير.

وأخيراً أشكر: المهندس (**أحمد المسلاتي**) الذي أعانني في إتمام هذا البحث المتواضع.

الباحث

محتويات البحث

الفصل الأول:

بعض المفاهيم الأساسية على المجموعات

الفصل الثاني:

الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية

الفصل الثالث:

الخواص التبولوجية للأعداد الحقيقية

مقدمة البحث

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وتعم الخيرات والبركات، وتزول الكربات، وبنوره تبدد الظلمات والصلاة والسلام علي سيد الخلق والمبعوث رحمةً للعالمين، سيدنا محمد وعلى أله وصحبه أجمعين وبعد ...

يعد **التحليل الرياضي** من أهم فروع علم الرياضيات، الذي يهتم بدراسة الدوال الرياضية وتحويلاتها باستخدام أدوات ترتبط بمفاهيم النهاية، حيث تدرس بعض المواضيع مثل الاتصال والاشتقاق والتكامل والتحدب، وغالباً ما يتم تدريس هذه المفاهيم على الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة، ومن الممكن أن تدرس أيضاً على فضاءات أخرى كالفضاء المتري والفضاء التبولوجي.

يسمي التحليل الرياضي الذي يهتم بدراسة الأعداد الحقيقية **بالتحليل الحقيقي**، حيث سيكون هو مركز بحثنا، الذي تناولنا فيه الخواص الجبرية والتبولوجية المتعلقة بالأعداد الحقيقية.

وقد قمنا بتقسيم هذا البحث إلى ثلاثة فصول، قسمت كما يلي:

الفصل الأول: يُتناول فيه بعض المفاهيم الأساسية على المجموعات والعمليات على المجموعات، والعلاقات، وأنواعها، ودرسنا نوع خاص من العلاقات، وهو علاقة الترتيب الكلي والجزئي وقابلية العد للمجموعات، ودرسنا أيضاً واحداً من أهم طرق البرهان الرياضي، وهو مبدأ الاستقراء الرياضي.

وأما **الفصل الثاني**: وتناولنا فيه الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية، وأول هذه الخواص هي خاصية المجال، وأما الخاصية الثانية وهي خاصية الترتيب، وعرفنا أيضا القيمة المطلقة للعدد الحقيقي ودراسة خواصها، وعرفنا مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة، وآخر الخواص الجبرية هي خاصية الكمال(التام)، التي تُعد من أهم الخواص التي تتميز بها مجموعة الأعداد الحقيقية، وعرضنا أيضا نظرية الأرخميدية التي تعتمد على خاصية الكمال.

وأما **الفصل الثالث**: ودرسنا فيه الخواص التبولوجية للأعداد الحقيقية، والفضاء الإقليدي وخواصه، ودرسنا أيضا الدالة المترية، ومنها عرفنا الفضاء المتري وبعض الأمثلة عليه، وتطرقنا بعدها الى تبولوجيا الفضاء الإقليدي، وأولها تعريف الجوار، ومنه عرفنا المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة، ومن ثم تطرقنا إلى المجموعات المتراصة، وعرفنا أيضاً واحدة من أهم النظريات في التراص وهي نظرية "هايني بوريل"، وختمنا البحث بموضوع المجموعات المترابطة، الذي سنبين أن مجموعة الأعداد الحقيقية ترث هذه الخاصية.

فنسأل الله تعالى أن يكون هذا البحث عاملاً مساعداً لطلبة قسم الرياضيات.

الباحث

الملخص

في هذا البحث تم بعون الله دراسة الخواص الجبرية والتبولوجية المتعلقة بالأعداد الحقيقية، حيث كان الفصل الأول شاملاً لبعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمجموعات، وأما الفصل الثاني فكان محوره الرئيسي الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية، وأما الفصل الثالث فكان متعلقاً بالخواص الجبرية للأعداد الحقيقية.

حيث تم دراسة أهم التعريفات والنظريات المتعلقة بالأعداد الحقيقية وأخذ المجموعات الجزئية منها ودراستها كحالة خاصة منها ، وكذلك محاولة استخلاص النتائج من ربط النظريات ببعضها .

فدراسة المفاهيم المتعلقة بالمجموعات أمر ضروري قبل الشروع في دراسة الخواص الجبرية والتبولوجية، وقد تم ترتيب هذا البحث وفقا لنظام كل فصل ومراعاة متطلباته.

وأرفق البحث بقائمتيَ المصطلحات والرموز لتساعد القارئ على تفسير بعض المصطلحات والرموز التي قد تكون غامضة نوعاً ما بالنسبة إليه.

الباحث

الفصل الأول :-

بعض المفاهيم الأساسية على المجموعات

بعض المفاهيم الأساسية على المجموعات

Some main concepts of sets

علي الرغم من كون المجموعات العصب الرئيسي للرياضيات المعاصرة، فإنها قد عرفت عند الرياضيين منذ القدم، وذلك باستخدامهم لمجموعات من عناصرٍ متشابهة، وتعد البداية لمواد التحليل الرياضي.

سندرس في هذا الفصل جزءاً مختصراً من نظرية المجموعات والمنطق الرياضي، التي لا غنى عنها لدراسة مادة التحليل الحقيقي، وسنعرضها بشيء من الاختصار وبقدر ما يخدم موضوع البحث.

(1-1) المجموعات sets :

تستعمل كلمة المجموعات بكثرة في المجلات العلمية المختلفة، وهي من المفاهيم الأساسية والمهمة في الرياضيات، سنعرض في هذا الفصل بعض الجوانب المهمة والتي تتعلق بمواضيع البحث.

إن المجموعة: هي أي تجمع من الأشياء المتميزة والمعرفة تعريفاً جيدا وواضحاً، وعادةً ما يرمز للمجموعة بالأحرف الكبيرة ... A, B, C وعناصر المجموعة بالأحرف الصغيرة ... a, b, c وتوضع العناصر داخل قوسين المجموعة { } ومثال على ذلك:

$$A = \{1,2,3,4, \dots\}$$

المجموعة التي لا تحتوي علي عناصر تسمي مجموعة خالية $(empty\ set)$ ويرمز لها بالرمز{ } او $\emptyset$ ويستخدم الرمز $\in$ للدلالة علي انتماء عنصرٍ ما إلي المجموعة، فمثلاً: العدد 7 ينتمي الي $\mathbb{R}$ وتكتب:

$$7 \in \mathbb{R}$$

وإن العدد 0.7 لا ينتمي الي Z وتكتب:

$$0.7 \notin Z$$

تعريف (1-1-1):

المجموعتان A, B متساويتان وتكتب $A = B$ إذا وإذا كان فقط تحتويان علي نفس العناصر وغير ذلك فإن المجموعتان غير متساويتان $A \neq B$ (1).

مثال (1-1-1):

المجموعة $A = \{1,2\}$ تساوي المجموعة $B = \{x \in Z: 0 < x < 3\}$ والمجموعة $C = \{2,4,6,8, \dots\}$ تساوي المجموعة $D = \{x \in N: x$ عدد زوجي$\}$.

تعريف (1-1-2):

إذا كان A, B مجموعتين فإن A تسمي مجموعة جزئية$(sub\ set)$ من B إذا كان كل عنصر في A هو أيضاً عنصر في B وتكتب $A \subseteq B$.

وتسمي A مجموعة جزيئة فعلية $(proper)$ من B وتكتب $A \subset B$ إذا كان $A \subseteq B$, $A \neq B$ (1).

مثال (1-1-2):

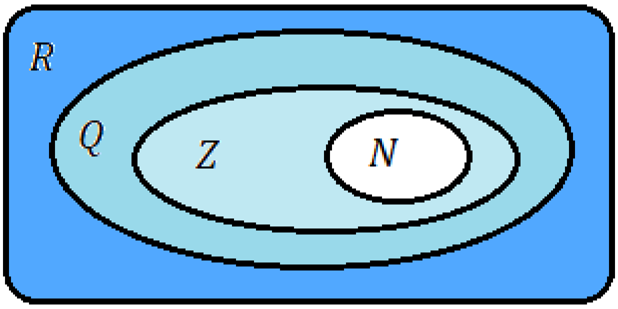
إذا كان $A = \{1,2,3,4,5\}$ فإن:

$$\{1,2\} \subset A \quad , \quad \{1,9\} \not\subseteq A \quad , \quad \{x \in Z: 1 \leq x \leq 5\} \subseteq A$$

ملاحظة:

المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة، وكل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها (1).

تأمل الشكل التالي:



$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

الشكل1-1

تعريف (1-1-3):

تسمي المجموعة التي عناصرها عبارة عن مجموعات باسم جماعة أو عائلة من المجموعات(1)، وأمثلة تلك الجماعات:

$$\{\emptyset\} \quad , \quad \{\{1\},\{a\}\} \quad , \{\{4,5\},\{3,4\},\{2,3\}\}$$

تعريف (1-1-4):

إذا كانت A مجموعة فإن مجموعة القوى للمجموعة A $(power\ set\ of\ A)$ هي المجموعة التي تضم جميع المجموعات الجزئية من Aبما فيها A نفسها و$\emptyset$، ويرمز لها بالرمز $P(A)$ (1).

مثال (1-1-3):

إذا كانت $A = \{1,2\}$ فإن:

$$P(A) = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\emptyset\}$$

وتعرف المجموعة الشاملة: على أنها المجموعة التي تضم جميع العناصر قيد الدراسة وعادةً ما يرمز لها بالرمز U.

(1-2) العمليات على المجموعات *Operations on sets* :

تعريف (1-2-1):

إذا كانت A, B مجموعتين فإن عملية التقاطع $(intersecion)$ للمجموعتين، ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ هي

المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي أن:

$$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$$

وتسمى المجموعتان A, B منفصلتين $(disjoint)$ إذا كان تقاطعهما يعطي مجموعة خالية (1).

تعريف (1-2-2):

إذا كانت A, B مجموعتين، فإن اتحاد $(union)$ للمجموعتين ويرمز لها بالرمز $A \cup B$،و هي المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في المجموعتين مع عدم التكرار (1).

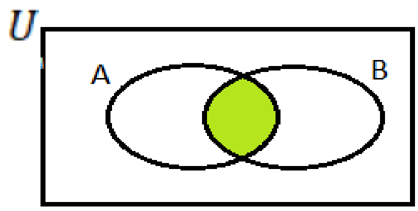
$$A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$$

مثال (1-2-1):

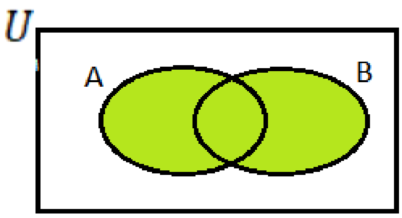
إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq 1\}$ فإن:

$$A \cup B = [-2,1) \quad , \quad A \cap B = (-1,0]$$

يمكن التعبير عن اتحاد و تقاطع المجموعات بالأشكال الأتية، وتسمي هذه الأشكال بأشكال فن:



$A \cap B$



$A \cup B$

الشكل1-2

تعريف (1-2-3):

إذا كانت A مجموعة جزيئة من المجموعة الشاملة U فإن مكملة $(complement)$ المجموعة A بالنسبة للمجموعة U، التي يرمز لها بالرمز A^c، تعرف كما يلي (1):

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$

من التعريف نلاحظ أن:

$$Q^c \cup Q = \mathbb{R}$$

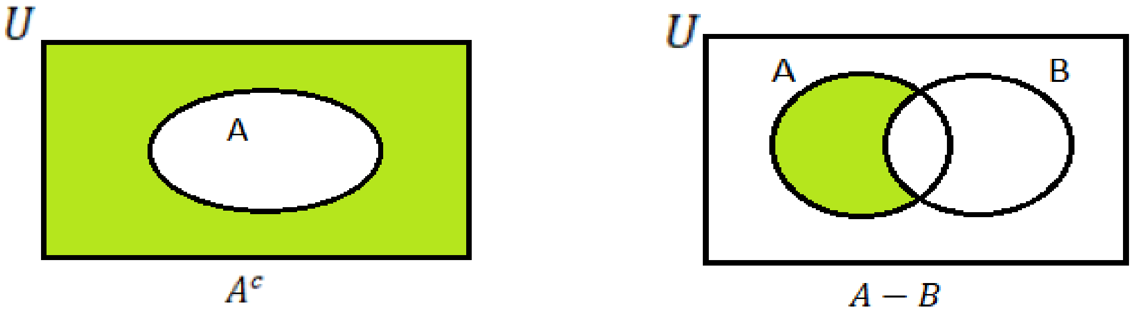
تعريف (1-2-3):

إذا كانت A, B مجموعتين فإن الفرق $(difference)$ بين A, B ويرمز له بالرمز $A - B$، تعرف كما يلي (1):

$$A - B = \{x \in U : x \in A \land x \notin B\}$$

نلاحظ من التعريف السابق انه إذا كان $A = U$ فإن:

$$A - B = B^c$$



الشكل1-3

(3-1) العلاقات وانواعها $\mathcal{R}elations\ and\ types$:

قبل تعريف العلاقة والتعرف على أنواعها لابد من معرفة الضرب الديكارتي لمجموعتين، ومنه يمكننا تعريف العلاقة ($\boldsymbol{Relation}$) بكونها مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي، و سنعرف الدالة بكونها علاقة تحقق شرطاً معين.

تعريف (1-3-1):

لنفرض أن A, B مجموعتين، الضرب الكارتيزي ($cartesien\ product$) للمجموعتين A, B ويرمز له بالرمز $A \times B$ و هو مجموعة:

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$$

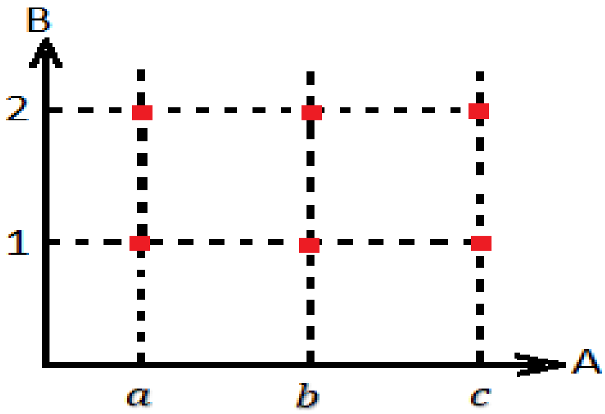
في الزوج المرتب (x, y) يسمي x الإحداثي الأول، ويسمي y الإحداثي الثاني [1].

مثال (1-3-1):

إذا كانت $A = \{a, b, c\}\ , B = \{1,2\}$ فإن:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

يمكن تصوير حاصل الضرب الديكارتي في المثال السابق في الشكل الاتي:



الشكل1-4

تعريف (2-3-1):

العلاقة $\mathcal{R}$ من Aالي B : هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ حيث أن A, B مجموعتان غير

خاليتين وتكتب:

$$\mathcal{R}: A \longrightarrow B$$

وفي حالت $(a,b) \in \mathcal{R}$، فإنه يكتب $a\mathcal{R}b$ وتقرأ a مرتبطة مع b بالعلاقة $\mathcal{R}$، وإذا كان $A = B$ فإن:

$$\mathcal{R}: A \longrightarrow A$$

وتسمي علاقة علي المجموعة A (1).

مثال (1-3-2):

إذا كانت A, B مجموعتين غير خاليتين وكانت $A \times B = \{(1,1),(3,1),(2,1)\}$، وعرفة علاقة بينهما كالتالي:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times B : x > y\}$$

فإن:

$$\mathcal{R} = \{(2,1),(3,1)\}$$

في التعريف التالي سنقدم أنواع العلاقات، وسنقوم بتوضيحها ببعض الأمثلة:

تعريف (1-3-3):

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة علي المجموعة A (3).

1) تسمي $\mathcal{R}$ علاقة عاكسة $(reflexive)$ إذا وفقط إذا كانت $(a,a) \in \mathcal{R} \;\; \forall \;\; a \in A$.

2) تسمي $\mathcal{R}$ علاقة متماثلة $(symmetric)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(a,b) \in \mathcal{R} \;\; \Rightarrow \;\; (b,a) \in \mathcal{R}$$

3) تسمي $\mathcal{R}$ علاقة انتقالية $(transitive)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(a,b) \in \mathcal{R} \;\wedge\; (b,c) \in \mathcal{R} \;\; \Rightarrow \;\; (a,c) \in \mathcal{R}$$

4) تسمي $\mathcal{R}$ علاقة متماثلة تخالفياً $(antisymmetric)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(a,b) \in \mathcal{R} \;\wedge\; (b,a) \in \mathcal{R} \;\; \Rightarrow \;\; a = b$$

مثال (1-3-3):

إذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ وكانت:

$$\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(2,2),(3,4),(1,1)\}$$

فإن:

$\mathcal{R}$ علاقة غير عاكسة لأن $(3,3) \notin \mathcal{R}$، وغير متماثلة لأن $(1,2) \in \mathcal{R}$ ولكن $(2,1) \notin \mathcal{R}$، وغير انتقالية لأن $(1,2),(2,3) \in \mathcal{R}$ لكن $(1,3) \notin \mathcal{R}$، ونلاحظ أن العلاقة، متماثلة تخالفياً لأن:

$$\forall \;\; (a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$$

مثال (1-3-4):

إذا كان $k \in N$، فإن العلاقة:

$$\mathcal{R} = \{(n,m) \in N \times N : n+m = 2k\}$$

هي علاقة متماثلة لأن $(n,m) \in \mathcal{R}$، فإن:

$$n+m = m+n = 2k \quad \Rightarrow \quad (m,n) \in \mathcal{R}$$

وهي أيضاً علاقة عاكسة لأن $(n,n) \in N \quad \forall \; n \in N$.

الآن إذا كان $(n,m) \in \mathcal{R}$ و $(m,h) \in \mathcal{R}$ فإن:

$$m+h = 2k_2 \quad , \quad n+m = 2k_1 \; : \; k_1, k_2 \in N \quad \Rightarrow$$

$$n+h = \; 2k_1 + 2k_2 + 2m \quad : \quad m, k_1, k_2 \in N \quad \Rightarrow \quad (n,h) \; \in \mathcal{R}$$

وهذا يوضح أن $\mathcal{R}$ علاقة انتقالية، ولكنها غير متماثلة تخالفياً، فمثلاً:

$$(3,5) \in \mathcal{R} \;\; , \;\; (5,3) \in \mathcal{R} \;\; \Rightarrow \quad 3 \neq 5$$

سنعرف الان نوعاً أخرً من العلاقة يجمع بين العلاقة العاكسة والمتماثلة والانتقالية، وهي علاقة التكافؤ.

تعريف (1-3-4):

العلاقة $\mathcal{R}$ علي المجموعة A علاقة تكافؤ، إذا كانت عاكسة وانتقالية ومتماثلة (3).

في المثال (1-3-4)، $\mathcal{R}$ علاقة متماثلة وعاكسة وانتقالية، وبذلك فإنها علاقة تكافؤ.

مثال (1-3-5):

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة علي مجموعة الأعداد الحقيقية كالآتي:

$$\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a \leq b\}$$

فإن العلاقة $\mathcal{R}$ هي عاكسة لآن كل $(a,a) \; \in \mathcal{R}$، ولكن ليست متماثلة لأنه إذا كانت:

$$(0,1) \in \mathcal{R} \;\Rightarrow (1,0) \notin \mathcal{R}$$

نلاحظ أن $\mathcal{R}$ علاقة انتقالية لأنه إذا كان:

$$(a,b) \in \mathcal{R} \,, (b,c) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad a \leq b \,, b \leq c \;\; \Rightarrow \quad a \leq c$$

ومن ذلك نصل إلي أن R مع العلاقة $\mathcal{R}$ ليست علاقة تكافؤ، وهي علاقة متماثلة تخالفياً لأنه إذا كان:

$$(a,b) \in \mathcal{R} \,, (b,a) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad a \leq b \;\; , \;\; b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b$$

سندرس في هذا الجزء من الفصل نوعاً معيناً من العلاقات، تسمي بعلاقات الترتيب والتي لها دورٌ كبيرٌ في ترتيب الكثير من البنى الرياضية.

(1-4) علاقة الترتيب الجزئي وعلاقة الترتيب الكلي:

تعريف (1-4-1):

تسمي العلاقة "$\mathcal{R}$" علاقة ترتيب جزئي $(partial\ order\ relation)$ علي المجموعة A، إذا كانت عاكسة، وانتقالية، ومتماثلة تخالفياً.

وإذا كانت "$\mathcal{R}$" هي علاقة ترتيب جزئي علي المجموعة A فنقول أن A مجموعة مرتبة جزئياً (3).

نلاحظ أن علاقة الاحتواء " $\subseteq$ " المعرفة علي $P(A)$ هي علاقة ترتيب جزئي.

تعريف (1-4-2):

تسمي المجموعة A مرتبة كلياً $(totally\ order)$ إذا كانت A مجموعة مرتبة جزئياً، وأي عنصرين فيها متقارنان أو مرتبطان، يقصد المتقارنان إذا كان (3):

$$\forall\ a,b \in A \ \Rightarrow\ a\mathcal{R}b\ \ or\ \ b\mathcal{R}a$$

من الواضح أن علاقة الترتيب الكلي هي علاقة ترتيب جزئي، و العكس غير صحيح.

مثال (1-4-1):

لنفرض أن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي:

$$(a_1,a_2)\mathcal{R}(b_1,b_2)\ \Leftrightarrow\ a_1 \le b_1\ ,\ a_2 \le b_2$$

لاحظ أن العلاقة السابقة هي علاقة ترتيب جزئي، و ليست علاقة ترتيب كلي لأنه إذا كان:

$$a=(1,2)\in \mathbb{R}^2\ ,\ \ b=(2,1)\in \mathbb{R}^2$$

فإن كل من العنصرين a,b غير متقارنين وبالتالي فإن العلاقة $\le$ ليست علاقة ترتيب كلي.

ومن التعريفين السابقين نصل الي أن مجموعة الأعداد الحقيقية مع عملية الترتيب الطبيعية " $\le$ " هي علاقة ترتيب كلي ويرمز لها بالرمز $(\mathbb{R},\le)$.

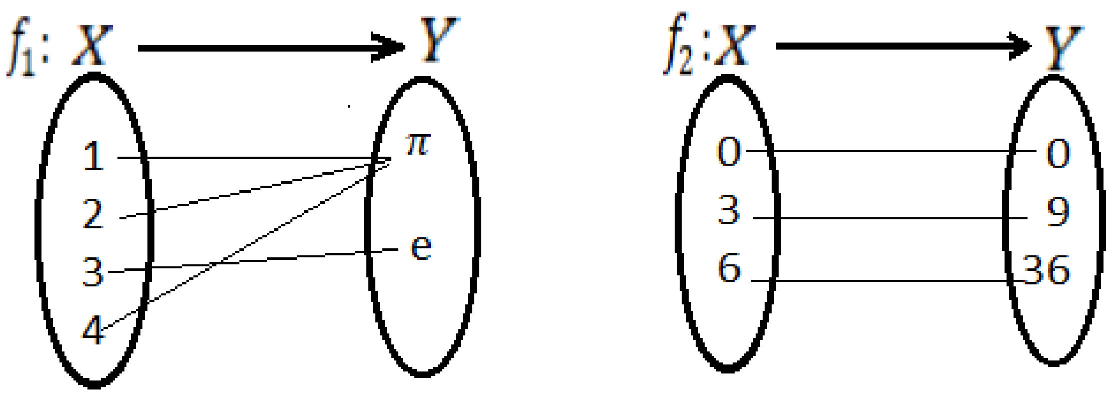
تعريف (1-4-3):

الدالة $(Function)$ (الراسم) هي علاقة، من مجموعة غير خالية X الي المجموعة غير خالية Y بحيث أن كل عنصر في X يرتبط بعنصر وحيد في Y، وتكتب:

$$f\ :X\to Y$$

والرمز $f(x)$ هو صورة العنصر $x\in X$ في المجموعة Y تحت تأثير الدالة f.

المجموعة X تسمي نطاق الدالة $(Domain)$ ويرمز له بالرمز D_f، والمجموعة Y تسمي بالنطاق المصاحب $(Co\text{-}Domain)$ للدالة، عناصر المجموعة Y المرتبطة بعناصر من المجموعة X تحت تأثير الدالة f تسمي مدي $(Range)$ الدالة، ويرمز له بالرمز R_f (1)، توضح الأشكال الآتية بعض الأمثلة على الدوال:



الشكل5-1

تعريف (1-4-4):

ليكن A, B مجموعتين غير خاليتين فإنه:

1) يقال أن الدالة $f: A \to B$ دالة أحادية $(one\ to\ one)$ إذا تحقق:

$$\forall\ x_1, x_2 \in A :\ f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

2) يقال أن $f: A \to B$ دالة فوقية $(on\ to)$ إذا كان مداها يساوي النطاق المصاحب لها أي إذا تحقق:

$$\forall\ b \in B\ \ \exists\, a \in A\ :\ \ f(a) = b$$

3) يقال أن $f: A \to B$ دالة ذات تناظر أحادي $(bijective)$ إذا كانت أحادية وفوقية (1).

في الشكل 1-5 نلاحظ أن الدالة الأولي دالة ليست أحادية، ولكنها فوقية، وبذلك فإنها ليست ذات تناظر أحادي، وأما الدالة الثانية فإنها أحادية وفوقية، وبذلك فإنها ذات تناظر أحادي.

في هذا الجزء من الفصل سنعرف العملية الثنائية، على أي مجموعة غير خالية.

تعريف (1-4-5):

لتكن S مجموعة غير خالية، ولنعرف عملية ولتكن $*$ علي المجموعة S يقال أن $*$ **عملية ثنائية** إذا كان:

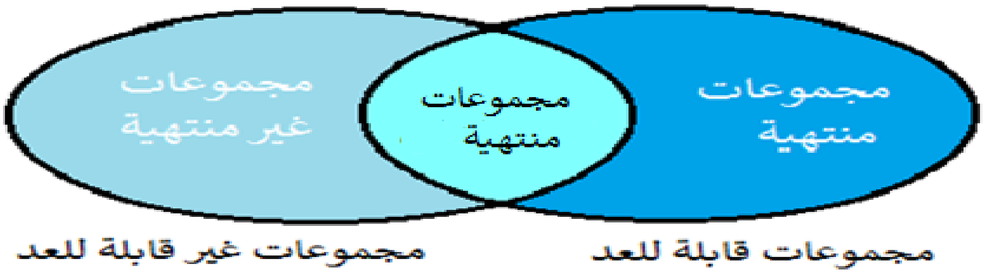
$$\forall\ a, b \in S\ \ \Rightarrow\ \ a * b \in S$$

من الواضح أن عملية الجمع وعملية الضرب الاعتياديتين المعرفتين على مجموعة الاعداد الحقيقية، هما عمليتان ثنائيتان، بينما عملية القسمة ليست عملية ثنائية علي Z.

ويعرف **النظام الرياضي** $(mathematical\ system)$ بأنه عبارة عن مجموعة غير خالية مع عملية ثنائية واحدة أوأكثر (7).

(1-5) المجموعات القابلة للعد وغير القابلة للعد:

تنقسم المجموعات الي مجموعات منتهية ومجموعات غير منتهية $(Finite\ and\ inFiniete\ sets)$ ومن بين المجموعات غير المنتهية هناك مجموعات هي الأصغر في الحجم، هذه المجموعات هي المجموعات القابلة للعد $(Countebel\ sets)$، وهناك نوع أخر من المجموعات غير منتهية، التي لا يمكن عدها أي (غير قابلة للعد) $(unCountebel\ sets)$.



الشكل1-6

تعريف (1-5-1):

المجموعة A مجموعة غير منتهية $(inFinite)$ إذا وجد دالة أحادية وفوقية بينها وبين مجموعة جزئية فعلية B منها، عدا ذلك فإنها مجموعة منتهية $(Finite)$ (1).

مثال (1-5-1):

الدالة $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$، المعرفة كالآتي:

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$$

هي دالة أحادية وفوقية ولهذا فإن $\mathbb{R}$ غير منتهية.

ملاحظة:

المجموعة $\emptyset$ هي مجموعة منتهية، لأنها لا تملك مجموعة جزئية فعلية منها.

مثال (1-5-2):

مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة غير منتهية لأنه لو فرضنا $O=\{1,3,5,7,\dots\}$، وكانت $f:N\to O$ المعرفة كالآتي:

$$f(n)=2n+1$$

هي دالة أحادية وفوقية، وبذلك فإن مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة غير منتهية.

عندما تكون المجموعتان منتهيتين ولهما العدد نفسه من العناصر، فإنه بالإمكان وجود تناضر أحادي بينهما، ولكن في حالة المجموعتين الغير منتهيتين، وجود تناضر أحادي بينهما يعني أنهما من نفس الحجم، ولتوضيح ذلك نقدم في هذا الجزء عرضاً للمجموعات غير منتهية التي لها حجم يناضر حجم الأعداد الطبيعية.

تعريف (1-5-2):

المجموعتان A,B متكافئتان $(Equivalent)$ إذا وإذا كان فقط هناك دالة ذات تناضر أحادي بينهما وتكتب رمزياً $A\sim B$ (1).

من الواضح أن أي مجموعة تكافئ نفسها.

مثال (1-5-3):

مجموعة الاعداد الصحيحة تكافئ مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية، وبفرض الدالة:

$$f(x)=2x\ :\ x\in Z$$

حيث أن الدالة f أحادية و فوقية.

مثال (1-5-4):

الدالة $f:(-1,1)\to(a,b)$ حيث أن a,b عددين حقيقيين والمعرفة كالآتي:

$$f(x)=\frac{b-a}{2}x+\frac{b+a}{2}$$

دالة حادية و فوقية، وبذلك فإن $(a,b)\sim(-1,1)$.

ملاحظة:

إذا كانت A,B,C أي مجموعات فإن (1):

$$A \sim B \ , \ B \sim C \quad \Rightarrow \quad A \sim C$$

وإذا كان:

$$A \sim B \quad \Rightarrow \quad B \sim A$$

مثال (1-5-5):

الدالة $f:(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة كالآتي:

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

دالة أحادية وفوقية، وبذلك تكون المجموعتان متكافئتين $\mathbb{R} \sim (-1,1)$، ومن المثال (1-5-4) فإن:

$$(a,b) \sim \mathbb{R} \quad : \quad a,b \in \mathbb{R}$$

تعريف (1-5-3):

تسمي المجموعة A مجموعة قابلة للعد إذا كانت منتهية أو $A \sim N$ (1).

أي أن إذا كانت A مجموعة قابلة للعد فإن هناك دالة أحادية وفوقية $f: A \ \rightarrow N$، نلاحظ من التعريف أن N مجموعة قابلة للعد، لأنها تكافئ نفسها.

ملاحظة:

كل مجموعة جزئية من قابلة للعد تكون قابلة للعد.

مثال (1-5-6):

إذا كانت $A = Z$ فإن Z قابلة للعد وذلك إذا أخذنا الدالة:

$$f: Z \rightarrow N \quad : \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ , & x \geq 0 \\ 2|x| \ , & x < 0 \end{cases}$$

هي دالة أحادية و فوقية ولذلك فإن Z مجموعة قابلة للعد.

مثال (1-5-7):

الفترة المفتوحة (0,1) غير قابلة للعد.

الحل:

لإثبات ذلك سنفرض أن الفترة (0,1) قابلة للعد، هذا يعني أنه يمكن كتابة (0,1) على الشكل:

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots$$
$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots$$
$$\vdots$$

والأن نكون العدد $b \in (0,1) \ \wedge \ b \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ حيث إن:

$$b = 0.b_1 b_2 \dots b_n \dots \quad \wedge \quad b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \dots, b_n \neq a_{nn} \dots$$

وإضافة إلي ذلك فإن $0 < b < 1$ ، وهذا تناقض مع الفرض، وبالتالي فإن $(0,1)$ غير قابلة للعد.

ملاحظة:

إذا كانت A مجموعة غير قابلة للعد، وكانت $A \subseteq B$ فإن المجموعة B غير قابلة للعد (1).

بالاستناد علي الملاحظة السابقة، فإن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

هناك طريقة لبرهنة صحة جملة رياضية ، التي يرمز لها بالرمز $P(n)$تتعلق بالأعداد الطبيعية تسمي **"مبدأ الاستقراء الرياضي"** لابد من التعرض لها لاستخدامها الواسع في البرهان صفة عامة.

(1-6) مبدأ الاستقراء الرياضي:

إذا كانت $P(n)$ جملة تتعلق بالأعداد الطبيعية حيث إن:

1) $P(1)$ صحيحة.

2) صحة الجملة $P(k)$ تؤدي الى صحة الجملة $P(k+1)$، فإن الجملة $P(n)$ صحيحة لكل عدد طبيعي n (1).

مثال (1-6-1):

برهن صحة $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

الحل:

الجملة $P(n)$ هي:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

عندما $n = 1$ فإن الجملة صحيحة:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

الجملة $P(k)$ المفروض صحتها ،هي:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

المطلوب، إثبات صحة الجملة $P(k+1)$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

وهذا يوضح صحة الجملة $P(k+1)$.

من مبدأ الاستقراء الرياضي نصل إلى أن $P(n)$ جملة صحيحة لكل n عدد طبيعي.

الفصل الثاني :-

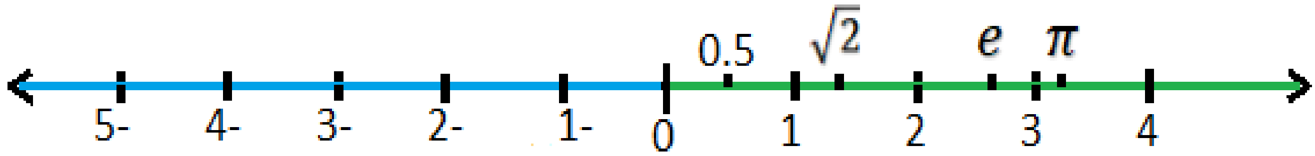
الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية

الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية

The Algebraic Properties of Real Numbers

(1-2) حقل الأعداد الحقيقية (*Real Numbers Field*):

يتكون خط الأعداد الحقيقية من الصفر، الذي يقسم خط الأعداد الى مجموعتين، وهما: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة والسالبة، ويرمز لهما بالرمز: $(\mathbb{R}^+), (\mathbb{R}^-)$ على التوالي، ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$.



الشكل 1-2

تعريف (2-1-1):

في مجموعة الأعداد الحقيقية توجد عمليتان ثنائيتان يرمز لهما بالرمز(+)، (.) تدعى جمع وضرب الأعداد الحقيقية على التوالي، تحقق الاتي:

1) $x + y = y + x$ لكل x , y في $\mathbb{R}$ وتدعى هذه الخاصية بخاصية (التبديل) .

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ لكل x, y, z في $\mathbb{R}$ خاصية (التنسيق) .

3) يوجد عنصر0 في $\mathbb{R}$ بحيث ان $x + 0 = x$ لكل x عنصر في $\mathbb{R}$ يسمى العنصر 0 بالمحايد لعملية الجمع.

4) لكل x عنصر في $\mathbb{R}$ يوجد $-x$ عنصر في $\mathbb{R}$ بحيث إن $x + (-x) = 0$ يدعى العنصر $x-$ بالمعكوس الجمعي للعنصر x .

5) $x . y = y . x$ لكل x , y في $\mathbb{R}$ تدعى هذه الخاصية بخاصية التبديل لعملية الضرب.

6) $x\,(y\,z) = (x\,.\,y)\,.\,z$ لكل x, y , z في $\mathbb{R}$ تدعى بخاصية التنسيق لعملية الضرب.

7) يوجد 1 عنصر في $\mathbb{R}$ بحيث إنه لكل x عنصر في $\mathbb{R}$ فان:

$$x\,1 = 1\,x = x$$

يسمى العنصر 1 بالمحايد الضربي.

8) لكل x عنصر في $\mathbb{R}$ بحيث إن $x \neq 0$ فإنه يوجد $\frac{1}{x}$ عنصر في $\mathbb{R}$ ، حيث إن :

$$\frac{1}{x}\, x = 0$$

يسمى العنصر $\frac{1}{x}$ بالمعكوس الضربي للعنصر x .

9) لكل x, y, z في $\mathbb{R}$ فإن:

$$x\,.(y + z) = (x\,.y) + (x\,.z)$$

أما الخاصية هذه فتدعى بخاصية التوزيع.

إذاً مجموعة الأعداد الحقيقية مع العمليتين الثنائيتين (+) ، (.) تكون حقل يدعى بحقل الإعداد الحقيقية $(The\ Real\ Number\ Field)$ ويرمز له بالرمز $(\mathbb{R}, +, .)$ (9).

مبرهنة (2-1-1):

إذا كان a , w عنصرين في $\mathbb{R}$ حيث إن $a + w = 0$ فإن (9):

$$a = -w$$

البرهان:

بما ان a عنصر في $\mathbb{R}$ فانه يوجد $-a \in \mathbb{R}$ حيث إن $a + (-a) = 0$، وبإضافة a – نحصل على:

$$-a + (a + w) = -a + 0 \quad \Rightarrow \quad (-a + a) + w = -a$$
$$\Rightarrow \quad 0 + w = -a$$
$$w = -a$$

مبرهنة (2-1-2):

اذا كان a, b عدديين حقيقيين بحيث إن $b \neq 0$, $a\,.\,b = 1$ فإن (9):

$$a = \frac{1}{b}$$

البرهان:

بما أن b عدد حقيقي و $b \neq 0$ فانه من التعريف(2-1-1) يوجد $\frac{1}{b}$ عدد حقيقي حيث إن:

$$\frac{1}{b}\ .\ b = 1$$

و بضرب طرفى المعادلة $a\,.\,b = 1$ في $\frac{1}{b}$ نحصل على

$$(a\,.\,b).\frac{1}{b} = 1\,.\frac{1}{b} \Rightarrow a\,.\left(\frac{1}{b}\,.\,b\right) = \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow a\,.\,1 = \frac{1}{b} \Rightarrow a = \frac{1}{b}$$

مبرهنة (2-1-3):

إذا كان a عدد حقيقي و $a \neq 0$ بحيث إن (9):

$$a\,.\,b = a$$

فان $b = 1$.

البرهان:

بما أن $a \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد $\frac{1}{a}$ عدداً حقيقياً ، وبضرب طرفي المعادلة $a\,.\,b = a$ في $\frac{1}{a}$ نحصل على

$$\frac{1}{a}\,.\,(a\,.\,b) = \frac{1}{a}\,.\,a \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\,.\,a\right).\,b = 1$$

$$1.\,b = 1 \Rightarrow \mathrm{b} = 1$$

مبرهنة (2-1-4):

إذا كان a , b عددين حقيقيين فإن (9):

1) $a\,.\,0 = 0\,.\,a = 0$

2) $-a = -1\,.\,(a)$.

3) $-(-a) = a$.

4) $-(a + \mathrm{b}) = (-a) + (-\mathrm{b})$.

5) $(-1)\,.\,(-1) = 1$.

البرهان:

1) من التعريف (2-1-1) الخاصية رقم 7 نجد أن

$$a\,.\,1 = a$$

بإضافة (a . 0) للطرفين نحصل على

$$(a\,.\,1) + (a\,.\,0) = a + (a\,.\,0) \Rightarrow a + 0 = a + (a\,.\,0)$$

$$\Rightarrow a = a + (a\,.\,0)$$

بإضافة a - للطرفين نحصل على

$$-a + a = -a + \big(a + (a\,.\,0)\big) \Rightarrow 0 = (-a + a) + (a\,.\,0)$$

$$\Rightarrow a\,.\,0 = 0\,.\,a = 0$$

وذلك لآن عملية الضرب إبداليه.

2) بما أن a عدد حقيقي فان:

$$a \, . \, 1 \; = \; a$$

بإضافة $((-1) \, . \, a)$ للطرفين نحصل علي

$$(a \, . \, 1) + (-1 \, . \, a) = a + (-1 \, . \, a) \;\; \Rightarrow \;\; a \, . \, (1 + (-1)) = a + (-1 \, . \, a)$$

$$\Rightarrow \;\; a \, . \, 0 = a + (-1 \, . \, a) \;\; \Rightarrow \;\; 0 = a + (-1 \, . \, a)$$

بإضافة a– للطرفين نحصل على

$$-a + 0 = -a + a + (-1 \, . \, a) \;\; \Rightarrow \;\; -a = 0 + (-1 \, . \, a)$$

$$-a = (-1) . \, a$$

3) بما أن a عدد حقيقي فإنه يوجد a- عدداً حقيقياً، يحقق الآتي

$$a + (-a) = 0 \quad .....❶$$

والآن بما أن $-a$ عدد حقيقي فإنه يوجد $(-a)$ - عدداً حقيقياً بحيث إن

$$-(-a) + (-a) = 0 \quad .....❷$$

بمقارنة المعادلة ❶ و❷ نحصل على

$$a = -(-a)$$

4) حسب المبرهنة (2-1-4) رقم 2 فإن:

$$-(a + \mathrm{b}) = -1 \, . \, (a + \mathrm{b})$$

إذا

$$-(a + \mathrm{b}) = (-1 \, . \, a) + (-1 \, . \, \mathrm{b})$$

بما أن $-a = (-1 \, . \, a)$ لكل a في $\mathbb{R}$ فإن

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

5) من المبرهنة (2-1-4) رقم 2 فإن

$$(-1) \, . \, (-1) = -(-1)$$

وبما أن لكل a عدد حقيقي فإن

$$-(-a) = a$$

إذا

$$(-1) . \, (-1) = 1$$

مبرهنة (2-1-5):

إذا كان $a \, , b \in \mathbb{R}$ بحيث إن (9):

$$a \, . \, b = 0$$

فإن، إما $a = 0$ أو $b = 0$

البرهان:

سوف نفرض $a \neq 0$ إذا الان المطلوب إثباته هو ان $b = 0$، بما ان $a \neq 0$ فإنه يوجد $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$

بحيث إن $\frac{1}{a} . a = 1$, إذا بضرب المعادلة $a . b = 0$ في $\frac{1}{a}$ نحصل على

$$\frac{1}{a} . (a . b) = \frac{1}{a} . 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} . a\right) . b = 0$$

$$\Rightarrow 1 . b = 0 = b$$

وبالاسلوب نفسه نفرض أن $b \neq 0$ ، ومن ثم نبرهن أن $a = 0$ وبهذا يكون البرهان قد اكتمل.

مبرهنة (2-1-6):

لكل عدد حقيقي وليكن a لا يساوي الصفر فإن $\frac{1}{a} \neq 0$ (9).

البرهان:

سوف نستخدم أسلوب البرهان بالتناقض، لنفرض أن a عدد حقيقي لا يساوي الصفر ولنفرض أن $\frac{1}{a} = 0$ حسب المبرهنة (2-1-5) فإن:

$$\frac{1}{a} . a = 0$$

لآن $\frac{1}{a} = 0$ من الفرض وهذا تناقض لآن $\frac{1}{a} . a = 1$ ، إذ لا بد من أن يكون $\frac{1}{a} \neq 0$.

مبرهنة (2-1-7):

إذا كان a عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر فان (9):

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

البرهان:

بما أن $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد $\frac{1}{a}$ عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر أيضا، حسب المبرهنة (2-1-6)، بحيث إن:

$$\frac{1}{a} . a = 1 \quad .....❶$$

والآن بما أن $\frac{1}{a}$ عدد حقيقي لا يساوي الصفر فإنه يوجد $\frac{1}{\frac{1}{a}}$ عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر، بحيث إن:

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{a})} = 1 \qquad ....❷$$

بمقارنة ❶ و❷ نحصل علي

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

مبرهنة (2-1-8):

إذا كان $a\,,b$ عددين حقيقيين فإن (9):

1) $(-a)\,.\,(-b) = a\,.\,b$

2) إذا كان $a \neq 0$ فإن:

$$\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$$

البرهان :

1) حسب المبرهنة (2-1-4) رقم 2 فإن :

$$(-a)\,.\,(-b) = -1\,.\,(a)\,.-1\,.\,(b)$$

وبما أن عملية ضرب الأعداد الحقيقية عملية إبداليه فإن:

$$(-a)\,.\,(-b) = -1\,.-1\,.\,(a)\,.\,(b)$$

وحسب المبرهنة (2-1-4) رقم 5 فإن:

$$(-a).\,(-b) = 1\,.\,(a).\,(b) \implies (-a)\,.\,(-b) = a\,.\,b$$

2) بما أن $a \neq 0$ فان $-a \neq 0$ ، فإنه يوجد $\frac{1}{-a}$ عدداً حقيقياً بحيث إن:

$$-a\,.\,\frac{1}{-a} = 1 \qquad ....❶$$

من المعطيات ان $a \neq 0$ إذا يوجد $\frac{1}{a}$ عدداً حقيقياً بحيث ان:

$$a\,.\,\frac{1}{a} = 1$$

بضرب المعادلة السابقة في 1- مرتين نحصل على

$$-1\,.-1\,.\,(a\,.\frac{1}{a}) = (-1\,.-1)\,.1$$

$$(-1\,.\,a).\left(-1\,.\frac{1}{a}\right) = 1 \Rightarrow -a\,.-\frac{1}{a} = 1 \;....❷$$

إذاً، بمقارنة المعادلتين ❶ و❷ نحصل على

$$\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$$

ملاحظة:

يمكن أن ندرس هنا مجموعة الأعداد القياسية كحالة خاصة من مجموعة الأعداد الحقيقية، إذا كان a , b عددين صحيحين و $b \neq 0$ فإن الشكل $\frac{a}{b} , -\frac{a}{b}$ تدعى بمجموعة الأعداد القياسية، ويرمز لها بالرمز Q أي أن (4):

$$Q = \left\{\frac{x}{y} : x, y \in Z , y \neq 0\right\}$$

إن الملاحظة السابقة تجعلنا نتطرق للمبرهنة الاتية:

مبرهنة (2-1-9):

لا يوجد عدد قياسي وليكن r بحيث إن (6):

$$r^2 = 2$$

البرهان:

العدد القياسي: هو أي عدد حقيقي يمكن كتابته على $\frac{a}{b}$ حيث إن a , b عددان صحيحان و $b \neq 0$ لذا تنص الصورة المبرهنة على انه لا يوجد عدد قياسي يحقق المساواة في المعادلة الآتي:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

وذلك مهما كان العددان صحيحان a , b، سوف نبرهن ذلك بالتناقض، لنفرض أنه يوجد عددان صحيحان a , b يمكن أن نفرض انهم اوليان فيما بينهم يحققان:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

عندئذٍ يكون

$$a^2 = 2 . b^2$$

فالعدد a عدد زوجي، وهذا يودي إلى أن b عدد زوجي أيضاً، وهذا تناقض لأن العددين أوليان فيما بينهما، وبذلك فإنه لا يوجد عددان صحيحان يحققان الشرط.

مبرهنة (2-1-10):

إذا كان x عدد قياسي و y عدد غير قياسي فان:

1) إذا كان $x \neq 0$ فان:

$$x\,.\,y \in Q^{c}$$

2) $x + y \in Q^{c}$

حيث ان Q^{c} مجموعة الاعداد غير القياسية.

البرهان:

1) سبق وأن ذكرنا بأن العدد القياسي: هو أي عدد حقيقي يمكن وضعه على صورة

$$\frac{a}{b} \;:\; b \neq 0 \;,\; a,b \in Z$$

وبما أن x عدد قياسي، أي يمكن وضعه على الصورة السابقة، أي أن

$$x = \frac{a}{b} \;:\; b \neq 0 \;,\; a,b \in Z$$

لنفرض عكس المبرهنة، أي أن:

$$x\,.\,y = q$$

حيث إن q عدد قياسي، هذا يعني أن

$$\frac{a}{b}\,.\,y = \frac{q_1}{q_2} \;:\; b\,,q_2 \neq 0 \;,\; a,b,q_1,q_2 \in Z$$

من الفرضية، أن $x \neq 0$ أي أن $a \neq 0$ ، وعلى هذا فأن:

$$y = \frac{b\,.\,q_1}{a\,.\,q_2} \quad \Rightarrow \quad b\,.\,q_1 \in Z \;, a\,.\,q_2 \in Z$$

اي y عدد قياسي وهذا تناقض؛ لأن y عدد غير قياسي حسب المبرهنة، إذ أنّ الفرضية خاطئة، حاصل ضربهم يجب ان يكون عدداً غير قياسي .

2) سوف نستخدم الأسلوب نفسه في البرهان، لنفرض العكس، أي أن حاصل جمعهم عدد قياسي، أي أن:

$$x + y = q$$

$$\frac{a}{b} + y = \frac{q_1}{q_2} \;:\; b, q_2 \neq 0$$

إذا

$$y = \frac{b.\,q_1 - a.\,q_2}{q_2.\,b} \;:\; q_2.\,b \neq 0$$

وبما أن

$$b.\,q_1 - a.\,q_2 \in Z \;,\; q_2.\,b \in Z$$

فإن y عدد قياسي، وهذا تناقض مع المعطيات.

(2-2) خاصية الترتيب للأعداد الحقيقية:

The order for real number preciasnes :

لقد عرفنا سابقاً أن مجموعة الأعداد الحقيقية تكون حقلاً مع العمليتين الثنائيتين $(. \ , +)$، وأما الخاصية التالية للأعداد الحقيقية: فهي خاصية الترتيب.

تعريف (2-2-1):

إن مجموعة الأعداد الحقيقية تكون حقلاً مرتباً " $Ordered\ Field$ " وتحقق الشروط التالية (9):

1) إذا كان a , b عددين حقيقيين موجبين فإن:

$$a + b \in \mathbb{R}^{+}$$

2) إذا كان a , b عددين حقيقيين موجبين فإن:

$$a . b \in \mathbb{R}^{+}$$

3) إذا كان a عدداً حقيقياً فإن :

$$a = 0 \quad \text{او} \quad a \in \mathbb{R}^{-} \quad \text{او} \quad a \in \mathbb{R}^{+}$$

ملاحظة:

الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط الثاني من رقم 3 تدعى "مجموعة الاعداد الحقيقية السالبة"، أي أنه (9):

$$\mathbb{R}^{-} = \{a \in \mathbb{R} : -a \in \mathbb{R}^{+} \}$$

ان الصفر ليس عددا حقيقيا موجبا ولا سالبا، أي أن

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{+} \cup \mathbb{R}^{-} \cup \{0\}$$

تعريف (2-2-2):

ليكن a , b عددين حقيقيين فإذا كان $a - b \in \mathbb{R}^{+}$ يقال حينها إن $a > b$، وإذا كان $a - b \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ يقال إن $a \geq b$، وإذا كان $-(a - b) \in \mathbb{R}^{+}$ فإنه يقال إن $b > a$ وإذا كان $-(a - b) \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ فانه يقال إن $b \geq a$ (9).

ملاحظة:

إذا كان a , b عددين حقيقيين فإن أحد العبارات الآتية تكون متحققة (9):

$$a > b \quad \text{او} \quad a = b \quad \text{او} \quad a < b$$

مبرهنة (2-2-1):

إذا كان a , b , c أعداداً حقيقية وكان $a > b$ و $b > c$ فإن (9):

$$a > c$$

البرهان:

بما ان $a > b$ فان $a - b \in \mathbb{R}^+$ أي أن $a - b$ عدد موجب، وأيضا بما أن $b > c$ فإن:

$$b - c \in \mathbb{R}^+$$

من التعريف (2-2-1) فإن حاصل جمع عددين موجبين هو عدد موجب، إذاً:

$$(a - b) + (b - c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + (-b + b) - c \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow a - c \in \mathbb{R}^+$$

وهذا يعني أن:

$$a > c$$

مبرهنة (2-2-2):

لتكن a , b , c , d أعداداً حقيقية فإن (9):

1) إذا كان $a > b$ فان:

$$a + c > b + c$$

2) اذا كان $a > b$ و $c > d$ فإن :

$$a + c > b + d$$

3) إذا كان $a > b$ و $c > 0$ فإن:

$$a . c > b . c$$

4) إذا كان $a > b$ و $c < 0$ فإن:

$$a . c < b . c$$

5) إذا كان $a > 0$ فإن:

$$\frac{1}{a} > 0$$

6) إذا كان $a < 0$ فإن:

$$\frac{1}{a} < 0$$

7) $a^2 \geq 0$ لكل a عدد حقيقي.

8) إذا كان $a^2 + b^2 = 0$ فإن:

$$a = b = 0$$

البرهان :

1) بما أن $a > b$ فإن :

$$a - b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a - b + c - c \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow (a + c) - (b + c) \in \mathbb{R}^+$$

إذا حسب التعريف (2-2-2) فإن:

$$a + c > b + c$$

2) بما أن $a > b$ فإن $(a - b)$ عدد حقيقي موجب، وبما أن $c > d$ فان $(c - d)$ عدد حقيقي موجب أيضاً، إذا حسب التعريف (2-2-1) رقم 1 فإن:

$$(a - b) + (c - d) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a + c) - (b + d) \in \mathbb{R}^+$$

إذا

$$a + c > b + d$$

3) بما أن $a > b$ فإن $(a - b)$ عدد حقيقي موجب، وبما أن $c > 0$ فإن c عدد حقيقي موجب أيضا، حسب التعريف (2-2-1) رقم 2 فإن:

$$(a - b).c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a.c) - (b.c) \in \mathbb{R}^+$$

إذا حسب التعريف (2-2-2) فإن:

$$a.c > b.c$$

4) بما أن $a > b$ فإن $(a - b) \in \mathbb{R}^+$ ، وأيضا بما أن $c < 0$ فان $-c \in \mathbb{R}^+$ ، إذا

$$(a - b).(-c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a.-c) + (-b.-c) \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow (a.-c) + (b.c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (b.c) - (a.c) \in \mathbb{R}^+$$

إذا

$$b.c > a.c$$

5) بما أن $a > 0$ فإنه من التعريف (2-2-2) فإن $a \neq 0$ ، إذا يوجد $\frac{1}{a} \neq 0 \in \mathbb{R}$، المطلوب إثباته الآن هو أن : $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$ لنبرهن ذلك سوف نفرض العكس، لنفرض أن $\frac{1}{a}$ عدد حقيقي سالب، أي أن:

$$-\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$$

بما أن:

$$a.\frac{1}{a} = 1$$

$\frac{1}{a}$ عدد سالب من الفرض، وهذا تناقض مع كون أن حاصل الضرب هو عدد موجب و a عدد موجب إذا لابد من ان تكون:

$$\frac{1}{a} > 0$$

بما أن $0 > a$ فإن $a \neq 0$ ،يوجد إذا $\frac{1}{a}$ عدداً حقيقياً، لا يساوي الصفر المطوب إثباته هو أن $-\frac{1}{a}$ عدد

موجب.

6) لنفرض أن $-\frac{1}{a}$ عدد سالب، بما أن a – عدد موجب وأن :

$$-a\,.-\frac{1}{a} \;=\; 1$$

السبب ؟ من المبرهنة (2-1-8) رقم 2، لكن $-\frac{1}{a}$ عدد حقيقي سالب حسب الفرض وهذا تناقض مع كون أن حاصل ضربهم عدد حقيقي موجب، وأن a عدد حقيقي سالب، إذاً لابد من أن تكون:

$$\frac{1}{a} < 0$$

7) لنفرض أن $a > 0$ فإن:

$$a.a > 0 \;\Rightarrow\; a^2 > 0$$

ولو فرضنا أن $a < 0$ فإن:

$$-a > 0 \;\Rightarrow\; -a\,.-a > 0 \;\Rightarrow\; a\,.a > 0 \;\Rightarrow\; a^2 > 0$$

وإذا كان :

$$a = 0 \;\Rightarrow\; a^2 = 0$$

وبذلك يكون $a^2 \geq 0$ لكل a عدد حقيقي.

8) بما أن $b^2 \geq 0$ و $a^2 \geq 0$ لكل $a\,,b$ عددان حقيقيان ، ولنفرض أن $a = 0$ فإن:

$$0^2 + b^2 = 0 \;\Rightarrow\; b = 0$$

ولنفرض أن $b = 0$ ، فإن :

$$a^2 + 0^2 = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$$

وأخيراً لو فرضنا أن $b = 0\;,\; a > 0$ فإن :

$$a^2 + 0^2 > 0$$

وبالطريقة نفسها، لو كان $a = 0, b > 0$ أو $a > 0\,, b > 0$، نصل إلى أنه كي يكون $a^2 + b^2 = 0$ فإن:

$$a = 0\,, b = 0$$

مبرهنة (2-2-3):

إذا كان $a\,,b$ عددين حقيقيين، وكان $a > 0$ و $b > a$ فإن (4):

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

البرهان:

بما أن $a > 0$ و $b > a$ فإن :

$$b > 0$$

أي أن $b > a > 0$ ومنها فإن:

$$b \,.\, a > 0$$

لأن $a\,,b$ عددين موجبين ومنها نصل إلي أن

$$b \,.\, a \neq 0$$

إذا يوجد $\frac{1}{a\,.\,b}$ عدداً حقيقياً موجباً لا يساوي الصفر، وبما أن:

$$b > a \;\Rightarrow\; b\,.\,\frac{1}{ab} > a\,.\frac{1}{ab} \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

مبرهنة (2-2-4):

إذا كان $a\,,b$ عددين حقيقيين وأن $a > b$ فإن (9):

$$a > \frac{a+b}{2} > b$$

البرهان:

بما أن $a > b$ فإن

$$a + a > a + b \Rightarrow 2\,.a > a + b \Rightarrow a > \frac{a+b}{2}$$

سنرمز للمتباينة السابقة بالرمز 1، وبالطريقة نفسها بما أن:

$$a > b \Rightarrow a + b > b + b \Rightarrow a + b > 2\,.b$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} > b \quad ......2$$

إذا نستنتج من 1 و2 أن:

$$a > \frac{a+b}{2} > b$$

نتيجة (2-2-1):

نستنتج من المبرهنة السابقة أن بين أي عددين قياسيين مختلفين، يوجد عدد قياسي، نلاحظ في المبرهنة السابقة أن $a\,,b$ عددان قياسيان، فإن $\frac{a+b}{2}$ عدد قياسي يقع بينهما بشرط أن$a \neq b$.

بصورة عامة فإن بين أي عددين حقيقيين غير متساويين يوجد عدد لا نهائياً من الأعداد الحقيقية.

مبرهنة (2-2-5):

مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة لا تحتوي على أصغر عنصر، وكذلك مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

البرهان:

ولنفرض عكس المبرهنة أي أن$\mathbb{R}^+$ تملك أصغر عنصر وليكن a، أي أن $a > 0$ لأنه عدد موجب، حسب

النتيجة (2-2-1) فإنه يوجد عدد حقيقياً وليكن x بحيث إن:

$$a > x > 0$$

وهذا تناقض لأن a أصغر عنصر، إذاً، الفرضية خاطئة أي أن $\mathbb{R}^+$ لا تحتوي علي أصغر عنصر، وكذلك مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة لا تحوي على أكبر عنصر، ويكون برهان بالأسلوب نفسه.

مبرهنة (2-2-6):

ليكن a أي عدد حقيقي فإن:

$$a^2 \geq 0$$

البرهان:

لإثبات هذه المبرهنة سوف ندرس هنا ثلاث حالات، فحسب التعريف (2-2-1) فانه لأي عدد حقيقي وليكن a فإن:

$$a < 0 \text{ او } a > 0 \text{ او } a = 0$$

ولنفرض أولا أن $a = 0$ إذا

$$a^2 = a\,.\,a = 0\,.\,0 = 0$$

$$a^2 = 0$$

ولنفرض الآن أن $a > 0$ إذا حسب التعريف (2-2-1) فإن:

$$a\,.\,a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

والآن لنفرض أن $a < 0$ إذاً، حسب التعريف (2-2-2) فإن $-a > 0$ إذاً:

$$-a\,.-a > 0$$

و حسب المبرهنة (2-4-1) رقم 2 فإن:

$$-a\,.-a = -1\,.\,a\,.-1\,.\,a > 0$$

$$-1\,.-1\,.\,a\,.\,a > 0 \Rightarrow a\,.\,a > 0$$

إذاً:

$$a^2 > 0$$

وبناءً على كل ذلك فإن:

$$a^2 \geq 0 \;:\; a \in \mathbb{R}$$

مبرهنة (2-2-7):

إذا كان $b \geq 0$ و $a \geq 0$ حيث إن $a\,, b$ عددين حقيقيين فإن (8):

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,.\,b}$$

البرهان:

بما إن a , b عددان حقيقيان فإن $(a - b)$ عدد حقيقي إذاً، حسب المبرهنة (2-2-4) فإن:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b) .\ (a-b) \geq 0$$

$$a^2 - 2. a. b + b^2 \geq 0$$

بإضافة $(4. a. b)$ للطرفين نحصل على:

$$a^2 - 2. a. b + b^2 + 4. a. b \geq 4. a. b$$

$$a^2 + 2. a. b + b^2 \geq 4. a. b \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4. a. b$$

إذاً:

$$a + b \ \geq 2\sqrt{a. b}$$

مبرهنة (2-2-8):

إذا كان a , b عددان حقيقيان وكان $a . b > 0$ فإن (9):

$$a > 0 , b > 0 \quad \text{او} \quad a < 0 , b < 0$$

البرهان:

لإثبات هذه المبرهنة، نفرض أولا أن $a > 0$ ونحاول إثبات أن $b > 0$، ومن ثم نفرض أن $a < 0$، ونحاول إثبات أن $b < 0$.

لنفرض أولا أن $a \in \mathbb{R}^+$ فإنه يوجد $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$ ، وبما أن:

$$a . b > 0 \ \Rightarrow \frac{1}{a} . a . b > \frac{1}{a} . 0$$

$$\Rightarrow b > 0$$

ولأن لنفرض أن $a < 0$ ونريد إثبات أن $b < 0$، حسب المبرهنة (2-2-1) رقم 6 فإن:

$$\frac{1}{a} < 0$$

وبما أن:

$$a . b > 0 \Rightarrow - \frac{1}{a}. a . b > -\frac{1}{a} . 0$$

$$-b > 0$$

والآن نضرب المتباينة السابقة في (1-)، وتطبيق المبرهنة (2-2-1) رقم 4 نحصل على:

$$b < 0$$

(3-2) القيمة المطلقة للعدد الحقيقي:

The absolute value of the real number :

تعريف (2-3-1):

تُعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي وليكن x، كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

وتوصف القيمة المطلقة بالخواص الآتية:

1) $|x| > 0$ لكل $x \neq 0$ عدد حقيقي.

2) $|x| = 0$ إذا وإذا كان فقط $x = 0$.

3) $|x \,.\, y| = |x| \,.\, |y|$ لكل $x\,, y$ عددين حقيقيين .

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ لكل $x\,, y$ عددين حقيقيين وأن $y \neq 0$ (2).

البرهان:

1) إذا كان $x > 0$ فإن:

$$x > 0 \;\Rightarrow\; |x| > 0$$

وإذا كانت $x < 0$ فإن:

$$-x > 0 \;\Rightarrow\; |-x| > 0 \;\Rightarrow\; |x| > 0$$

وبذلك فإن $|x| > 0$ لكل $x \neq 0$.

2) لنفرض أن $|x| = 0$ فإن:

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad -x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

ولنفرض أن $x = 0$ فإن:

$$|0| = 0$$

وبذلك فإن $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$.

3) إذا كان $x \geq 0\,, y \geq 0$ فإن:

$$|x \,.\, y| = x \,.\, y = |x|.\,|y|$$

وإذا كان $x \geq 0\,, y \leq 0$ فإن:

$$|x \,.\, y| = -(x \,.\, y) = x \,.\, (-y) = |x|.\,|y|$$

وإذا كان $x \leq 0\,, y \leq 0$ فإن :

$$|x \,.\, y| = (-x)\,.\,(-y) = |x|.\,|y|$$

وبذلك يكون $|x\,.\,y| = |x|\,.\,|y|$ لكل $x\,,y$ عددين حقيقيين.

4) بما أن:

$$|\frac{x}{y}| = |x.\frac{1}{y}|$$

فإن من رقم(3) فإن:

$$\left|x.\frac{1}{y}\right| = |x|\,.\,|\frac{1}{y}|$$

إذاً:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad : \quad y \neq 0$$

مبرهنة (2-3-1):

إذا كان $a\,,b$ عددين حقيقيين فإن (9):

1) $|a| = |-a|$ لكل a عدد حقيقي.

2) إذا كان $b > 0$ فإن:

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$$

3) $-|a| \leq a \leq |a|$ لكل a عدد حقيقي.

البرهان:

1) بما أن $a \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي فإن هناك ثلاثة احتمالات، أولا إذا كان $a = 0$ فإن:

$$|a| = |0| = 0$$

وإذا كان $a > 0$ فإن:

$$|a| = a \quad ، \quad |-a| = -(-a) = a$$

وإذا كان $a < 0$ فإن:

$$|a| = -a \quad ، \quad |-a| = -a$$

إذاً في كل الأحوال:

$$|a| = |-a|$$

2) لنفرض أولاً: ان $|a| \leq b$ إذا حسب التعريف (2-3-1) فإن:

$$a \leq b \quad ، \quad -a \leq b \quad \Rightarrow \quad b \geq a \geq -b$$

والآن لنفرض أن $b \geq a \geq -b$ إذا:

$$b \geq a \quad ، \quad -a \leq b$$

إذاً، حسب التعريف (2-3-1) فإن:

$$|a| \le b$$

3) بما أن:

$$|a| \ge a \quad \text{و} \quad |a| \ge -a$$

فإن:

$$|a| \ge a \quad \text{و} \quad -|a| \le a$$

ومنها نصل إلي أن:

$$|a| \ge a \ge -|a|$$

مبرهنة (2-3-2):

إذا كان x , y عددين حقيقيين فإن (2):

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

البرهان:

بما أن $|x| \ge \mathrm{x}$ و $|y| \ge \mathrm{y}$ فإن:

$$|x| + |y| \ge \mathrm{x} + \mathrm{y} \quad .....❶$$

وبما أن $|x| \ge -\mathrm{x}$ و $|y| \ge -\mathrm{y}$ فإن:

$$|x| + |y| \ge -\mathrm{x} - y \Rightarrow |x| + |y| \ge -(\mathrm{x} + y)$$

$$\Rightarrow -(|x| + |y|) \le (\mathrm{x} + y) \quad .....❷$$

من ❶ و ❷ فإن:

$$|x + y| \ge |x| + |y|$$

ان المتباينة السابقة تسمي بالمتباينة المثلثية (المتراجحة المثلثية).

مبرهنة (2-3-3):

إذا كان x , y عددين حقيقيين فإن (2):

$$|x \pm y| \ge \big||x| - |y|\big|$$

البرهان:

من الملاحظ أن $x = x - y + y$ ومن ذلك وباستخدام المتباينة المثلثية نجد أن:

$$|x| \le |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \ge |x - y| \quad .....❶$$

وكذلك

$$y = y - x + x$$

وباستخدام المتباينة المثلثية نجد أن:

$$|y| \le |y - x| + |x| \quad |y| - |x| \le |y - x|$$

$$\Rightarrow -(|x| - |y|) \le |-(x - y)|$$

وحسب المبرهنة (2-3-1) نجد أن:

$$-(|x|-|y|) \leq |x-y| \quad .....❷$$

إذاً من ❶ و ❷ وبتطبيق المبرهنة (2-3-1) نتحصل على

$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$$

والآن بوضع $-y$ بدلا من y نجد أن:

$$|x-(-y)| \geq \big||x|-|-y|\big| \;\Rightarrow\; |x+y| \geq \big||x|-|y|\big|$$

وهذا يوصلنا إلي أن:

$$|x \pm y| \geq \big||x|-|y|\big|$$

(2-4) مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة:

The Extended Real Number set :

تعريف (2-4-1):

تتألف مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة من الحقل $\mathbb{R}$ والعنصرين $\{-\infty, +\infty\}$ بعد المحافظة على علاقة الترتيب الأساسي لمجموعة الاعداد الحقيقية وتعرف:

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$

ومن المألوف تقديم هذه الخواص لمجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة:

1) إذا كان x عددا حقيقيا فإن:

i) $\frac{x}{-\infty} = \frac{x}{+\infty} = 0$

ii) $x - \infty = -\infty$

iii) $x + \infty = +\infty$

2) إذا كان $x > 0$ فإن:

i) $x.(+\infty) = +\infty$

ii) $x.(-\infty) = -\infty$

3) إذا كان $x < 0$ فإن:

i) $x.+\infty = -\infty$

ii) $x.-\infty = +\infty$

ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة بالرمز $\mathbb{R}^*$ أي أن (6):

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

المجموعة $\mathbb{R}^*$ لا تكون حقلاً مع العمليتين الجمع والضرب المعرفتين عليها.

(2-5) خاصية التمام (الكمال) ونظرية ارخميدس:

Completrness Property and Archimedean Theory :

تُعدُّ خاصية التمام للأعداد الحقيقية من أهم الخواص الجبرية، ولدراسة هذه الخاصية نحتاج للتعاريف الآتية:

تعريف (2-5-1):

لتكن A أي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

1) نقول إن a من مجموعة الاعداد الحقيقية حد علوي ($Upper\ bound$) للمجموعة A إذا كان

$$a \geq x \qquad \forall \quad x \in A$$

2) يقال إن b أصغر حد علوي ($Leas\ upper\ bound$) للمجموعة A إذا كان:

i) b حد علوي للمجموعة A .

ii) b أصغر من أو يساوي أي حد علوي أخر للمجموعة A.

بمعني أنه إذا كان c حد علوي أخر للمجموعة A فإن:

$$c \geq b$$

ويرمز لأصغر حد علوي للمجموعة A بالرمز $sup\ (A)$، نقول إن المجموعة $A \subseteq R$ محدودة ($Bounded$) من أعلي إذا كان لها حد علوي (2).

ملاحظة:

إن الحد العلوي قد لا يكون وحيداً، ولكن أصغر حد علوي لابد من أن يكون وحيداً إن وجد، وكذلك قد يكون الحد العلوي لمجموعة ما هو عنصر في المجموعة أو عنصر ليس من المجموعة، إذا كان الحد العلوي لمجموعة ما ينتمي لهذه المجموعة فلا بد أن يكون أصغر حد علوي (5).

مثال (2-5-1):

المجموعة $[0\,,1]$ نلاحظ أن أي عدد ينتمي للمجموعة $[1\,,+\infty[$ يكون حداً علوياً للمجموعة، لكن أصغر حد علوي هو $\{1\}$ لأنه أصغر عنصر في المجموعة $[1\,,+\infty[$.

ملاحظة:

لتكن A أي مجموعة فإن مجموعة كل العناصر التي تحقق:

$$\mathrm{x}_i \geq a \qquad \forall \quad a \in \mathrm{A} \quad : \quad i = 0,1,2,3 \ldots$$

تدعى مجموعة الحدود العليا للمجموعة A (5).

مبرهنة (2-5-1):

أصغر حد علوي لأي مجموعة يكون وحيداً إن وجد (4).

البرهان:

سوف نبرهن ذلك بفرض العكس، لنفرض أن أصغر حد علوي لمجموعة ما ولتكن A ليس وحيداً أي أنه x , y أصغر حدين علويين فإن:

$y \leq z$ لكل z حد علوي للمجموعة A ، وإذا كان $x \leq z$ لكل z حد علوي للمجموعة A و $x \leq z$ لكل z حد علوي للمجموعة A , فان $c < x$ لكل c في A ولكن y أصغر حد علوي كذلك، إذا $c < y$ لكل c عنصر في A إذاً:

$$x = y$$

مبرهنة (2-5-2):

لنفرض أن $A \subseteq \mathbb{R}$.

العدد $b \in \mathbb{R}$ يكون أصغر حد علوي للمجموعة A إذا وإذا كان فقط b حد علوي للمجموعة A ولكل $\varepsilon > 0$ هناك $x \in A$ حيث إن $x > b - \varepsilon$ (2).

البرهان:

إذا كان $b = sup(A)$ ، فلا بد أن نجد $x \in A$ حيث أن:

$$b < x + \varepsilon$$

وإذا فرضنا أنه لا يوجد $x \in A$ يحقق الشرط فلا بد أن يكون لدينا لكل x في A ما يلي:

$$b \geq x + \varepsilon$$

وهذا يعني أن $x \leq b - \varepsilon$ من ذلك نستنتج أن $b - \varepsilon$ يكون حداً علوياً للمجموعة، لكن $b - \varepsilon$ أصغر من b، الذي هو أصغر حد علوي وهذا تناقض مع كون أن b أصغر حد علوي .

لنفرض الآن أن c هو حد علوي آخر للمجموعة A، لكي يكون b أصغر حد علوي فلا بد أن يكون $b \leq c$، و لنفرض ان $b > c$ ، إذا كان $\varepsilon = b - c$ فإن $c = b - \varepsilon$ ونعرف أن $x \leq c$ لأي $x \in A$ وهذا يؤدي إلي أن $x \leq b - \varepsilon$ لكل $x \in A$، وهذا يناقض الشرط المعطى.

تعريف (2-5-2):

لتكن A أي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

1) نقول إن a من مجموعة الأعداد الحقيقية حد سفلي $(Lower\ bound)$ للمجموعة A اذا كان

$$a \leq x \quad \forall \quad x \in A$$

2) العدد b من مجموعة الأعداد الحقيقية يسمي أكبر حد سفلي $(greaxest\ lower\ bound)$ إذا كان:

أ) b حد سفلي للمجموعة A .

ii) b أكبر من أو يساوي أي حد سفلي آخر، بمعني أنه إذا كان c حد سفلي آخر فإن:

$$b \geq c$$

ويرمز لأكبر حد سفلي للمجموعة A بالرمز $inf\ (A)$.

نقول عن المجموعة أنها محدودة من أسفل إذا كان لها حد سفلي (2).

ملاحظة:

إن الحد السفلي لأي مجموعة قد لا يكون وحيدا، ولكن أكبر حد سفلي لا بد من أن يكون وحيداً، وكذلك قد يكون الحد السفلي لمجموعة ما، عنصرا في المجموعة أو عنصراً ليس من المجموعة، وإذا كان الحد السفلي لمجموعة ما ينتمي لها فإنه لابد من أن يكون أكبر حد سفلي (5).

مثال (2-5-2):

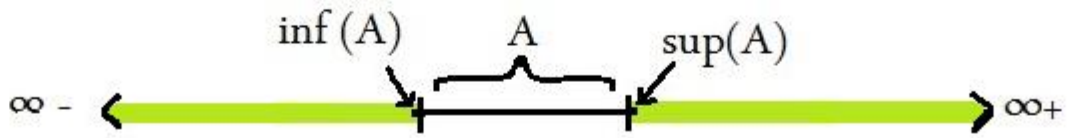
في المثال(2-5-1)، المجموعة [0 , 1]، نلاحظ أن أي عنصر في المجموعة $(-\infty, 0]$ يمثل حداً علوياً للمجموعة [0 , 1]، ولكن أكبر حد سفلي هو {0} لأنه أصغر عنصر في المجموعة [0 , 1].

ملاحظة:

لتكن A أي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية فإن مجموعة كل العناصر التي تحقق:

$$x_i \leq a \qquad \forall \qquad a \in A \qquad : i = 1,2,3 \ldots$$

تدعي مجموعة الحدود السفلى للمجموعة A (5).



الشكل 2-2

إن المبرهنة2-5-2 و2-5-1 يمكن برهنتها على الحد السفلي أيضا بنفس الإسلوب.

نتيجة (2-5-1):

كل مجموعة جزئية من مجموعة محدودة تكون محدودة، إن برهان هذه النتيجة سهل جداً، لو فرضنا أن A محدودة فإنه يوجد عنصر أكبر من جميع عناصر المجموعة، أي أنها محدودة من أعلى، ولو أخذنا أي مجموعة جزئية منها، فإن هذا العنصر سيكون أيضا أكبر من جميع عناصر المجموع الجزئية وبذلك تكون محدودة من أعلى (بنفس الطريقة نبرهن الحد السفلي) وبذلك تكون المجموعة الجزئية محدودة (5).

مثال (2-5-3):

في المجموعة الخالية $\emptyset$ ، نلاحظ أن أي عنصر في مجموعة الأعداد الحقيقية يكون حداً علوياً، وكذلك حداً سفلياً، أي أنها مجموعة محدودة.

ذكرنا بأن مجموعة الأعداد الحقيقية تتصف بخاصية التمام، وذكرنا التعاريف اللازمة لذلك والآن سنعرف متي تحقق أي مجموعة هذه الخاصية، وسنبين كيف أن مجموعة الأعداد الحقيقية تحقق هذه الخاصية، لنبدأ بالتعريف الآتي:

تعريف (2-5-3):

إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية ومحدودة من أعلى، فإن لها أصغر حد علوي في $\mathbb{R}$، وكذلك إذا كانت محدودة من أسفل فإن لها أكبر حد سفلي في $\mathbb{R}$ (5).

تعد النظرية التالية من أهم النظريات التي تعتمد على خاصية التمام(الكمال):

النظرية الأرخميدية (Archimedean Theory):

إذا كان x , y عددين حقيقيين، وكان $x > 0$ ، فإنه يوجد عدد صحيح n موجب بحيث إن (4):

$$nx > y$$

البرهان:

لتكن A المجموعة التي تضم جميع العناصر nx، حيث إن n عدد صحيح موجب أي أن:

$$A = \{nx : x \in \mathbb{R}, n \in Z^+\}$$

ولنفرض عكس النظرية أي أننا سوف نفرض أن:

$$nx < y$$

هذا يعني أن A مجموعة محدودة من أعلى، إذاً لنفرض أن:

$$sup(A) = \alpha \;\Rightarrow\; \alpha \geq nx \quad \forall\; nx \in A$$

وبما أن $nx \in A$ فإن $(1+n)x \in A$ أي أن:

$$(1+n)x \geq \alpha \;\Rightarrow\; nx \geq \alpha - x$$

ولكن هذا تناقض، لأن α هو أصغر حد علوي، وبذلك فإن الفرضية السابقة غير صحيحة أي أنه لابد من أن يكون:

$$nx > y$$

مبرهنة (2-5-3):

مجموعة الأعداد الطبيعية N مجموعة غير محدودة من أعلي (4).

البرهان:

نحن نعلم أن $1 \in N \,:\, N \neq \emptyset$، لنفرض أنها محدودة من أعلى، حسب خاصية التمام فإن لها أصغر حد علوي وليكن α يحقق:

$$\alpha \geq n \;,\; \forall\; n \in N$$

بما أن $n \in N$ فإن $n + 1 \in N$ وعلى هذا:

$$\alpha \geq n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha - 1 \geq n$$

وهذا تناقض مع كون أن α أصغر حد علوي.

نتيجة (2-5-2):

لكل $0 < x$ عدد حقيقي، يوجد $n \in N$ بحيث $x > \frac{1}{n}$ (4).

البرهان:

بما أن $\frac{1}{x}$ ليس حداً علوياً للمجموعة N حسب المبرهنة (2-5-3) وبذلك فإنه يوجد $n \in N$ بحيث:

$$n > \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{1}{n}$$

وعلى هذا، إذا كان $x \in \mathbb{R}$ يحقق $x \leq \frac{1}{n}\ ,\ \forall\ n \in N$ فإن $0 \leq x$، وإذا كان $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ فإن $x = 0$.

مبرهنة (2-5-4):

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد طبيعي n بحيث إن (4):

$$n > x$$

البرهان:

إن إثبات هذه المبرهنة بسيط جداً وذلك بفرض العكس، أي أنه لا يوجد عدد طبيعي يحقق شرط المبرهنة إي أن:

$$\exists\ x \in \mathbb{R}\ :\ n \leq x\ ,\ \forall\ n \in N$$

نلاحظ أن x حد علوي لمجموعة الأعداد الطبيعية، وحسب (2-5-3) فإن هذا تناقض، إذا يوجد عدد طبيعي يحقق شرط المبرهنة.

مبرهنة (2-5-5):

إذا كان $S \subseteq \mathbb{R}$ ومحدودة علوياً، و $a \in \mathbb{R}$ ولتكن:

$$a + S = \{a + x : x \in S\}$$

فإن $sup(a + S) = a + sup(S)$ (5).

البرهان:

بما أن S محدودة علوياً، فإن لها أصغر حد علوي لنفرض أن:

$$u = sup(S) \ \Longrightarrow\ x \leq u \ \ \forall\ \ x \in S \ \Longrightarrow\ a + x \leq a + u$$

هذا يعني أن $a + u$ حد علوي للمجموعة $a + S$ ، لكي نثبت أن $a + u$ أصغر حد علوي، لنفرض أن v حد علوي آخر:

$$a + x \leq v \ \Longrightarrow\ x \leq v - a$$

بما أن $sup(S) = u$ هذا يعني أن:

$$u \leq v - a \ \Longrightarrow\ u + a \leq v$$

هذا يعني أن $a + u = sup(a + S)$ وعلى هذا فإن:

$$sup(a + S) = a + u = a + sup(S) \ \Longrightarrow\ sup(a + S) = a + sup(S)$$

تسمي الخاصية التالية بالخاصية التجميعية، وإن مبرهنتها تنص على:

مبرهنة (2-5-6):

لتكن $E, F \subseteq \mathbb{R}$ مجموعتين غير خاليتين وأن $sup(E)\ , sup(F) \in \mathbb{R}$ فإذا عرفت:

$$S = E + F = \{x + y : \ x \in E\ , y \in F\}$$

فإن S محدودة علوياً وأن (5):

$$sup(S) = sup(E) + sup(F)$$

البرهان:

لنفرض أن $sup(E) = u_1\ , sup(F) = u_2$ من تعريف أصغر حد علوي، فإن:

$$x \le u_1 \ \ \forall\ x \in E\ ,\ \ y \le u_2\ \forall\ y \in F \ \ \Longrightarrow\ \ x + y \le u_1 + u_2\ \ \forall\ x + y \in S$$

وهذا يعني أن المجموعة S محدودة من أعلى، وعلى هذا فأن لها أصغر حد علوي، وأن:

$$\sup(S) \le u_1 + u_2 \quad ....❶$$

بما أن:

$$u_1 = sup(E) \ \Longrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ x \in E\ :\ u_1 - \varepsilon < x$$

$$,\ \ u_2 = sup(F) \ \Longrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ y \in F\ :\ u_2 - \varepsilon < y$$

$$\Longrightarrow\ \ u_1 + u_2 - 2\varepsilon < x + y \le sup(S)$$

$$\Longrightarrow\ \ u_1 + u_2 \le sup(S) \qquad ....❷$$

من❶ و❷ نصل إلي أن:

$$sup(S) = u_1 + u_2 = sup(E) + sup(F)$$

الفصل الثالث:-

الخواص التبولوجية للأعداد الحقيقية

الخواص التبولوجية للأعداد الحقيقية

The Topology Properties of Real Numbers

سنقدم في هذا الفصل مفهوم الخواص التبولوجية للأعداد الحقيقية في $\mathbb{R}^k$، ومن ثم نتعرض لبعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بها، الجدير بالذكر هو أن الكثير من المفاهيم التي سنتعرض لها في هذا الفصل ما هي إلا حالات خاصة لما يتم دراسته في مبادئ التبولوجي العام ($General\ Topology$).

إن تبولوجي بصفةً عامة ينقسم الي قسمين، القسم الأول يهتم بدراسة الأشكال أي لو أخذنا الأشكال (مثلث، مربع، دائرة ...) فإن في تبولوجي الأشكال تعد شكلاً واحداً، لكن التبولوجي الذي سوف ندرسه ليس هذا التبولوجي و إنما تبولوجي المجموعات والنقاط ($set\ and\ point\ Topology$)

وتركيزنا في هذا الفصل على المجموعات والنقاط ومتى نقول إن المجموعة مفتوحة أو مغلقة، وما هي خصائص النقاط الموجودة داخل هذه المجموعة.

إذاً ما معنى تبولوجي؟ بشكل عام إذا كان X مجموعة غير خالية، وليكن τ هو تجمع من المجموعات الجزئية في X يحقق الشروط الآتية:

1) $\emptyset$ و X في τ.

2) تقاطع أي عنصرين من عناصر τ يكون أيضاً في τ .

3) اتحاد أي عدد من العناصر τ يكون أيضاً في τ .

عندها فإن النظام τ يدعى تبولوجي على X وأن الزوج المرتب (X, τ) يدعى بالفضاء التبولوجي (3).

مثال:

لتكن $X = \{a, b\}$ و لتكن $\tau = \{\{a, b\}, X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ تجمع من المجموعات الجزئية في X ، نلاحظ أن كل من $X, \emptyset$ في τ، وأن تقاطع أي مجموعتين يكون أيضاً في τ، وأن اتحاد لأى عدد من المجموعات في τ يكون أيضاً في τ ولكن لو فرضنا أن $\tau_1 = \{\{b\}, X, \emptyset, \{a\}\}$، فإن:

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1$$

وبذلك فإن (X, τ) هو فضاء تبولوجي، ولكن (X, τ_1) ليس فضاءً تبولوجياً.

(3-1) الفضاء الإقليدي($Euclidean\ space$) :

تعريف(3-1-1):

لكل عدد صحيح موجب وليكن k، ولتكن $\mathbb{R}^k$ المجموعة التي تضم جميع القوي k المرتبة k- $Tuples$، و

$\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$، حيث إن $x_1, x_2, \dots, x_k$ أعداد حقيقية تدعى الإحداثيات للعنصر x ($Coordinates\ of$ x)، تسمي عناصر $\mathbb{R}^k$ نقاط (Points) إذا كان k=2، وتسمي متجهات (vectors) إذا كان $k > 2$ (4).

إذا كان y عنصر في $\mathbb{R}^k$ و α عدد حقيقي فإن:

1) $\mathrm{x} \pm \mathrm{y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots x_k \pm y_k)$

2) $\alpha.\mathrm{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_k)$

نلاحظ أن كل من $\alpha.\mathrm{x}$ و $\mathrm{x} \pm \mathrm{y}$ عناصر في $\mathbb{R}^k$، وتدعى العمليتان السابقتان جمع المتجهين وضرب عدد حقيقي في متجه، وأن هاتين العمليتين تحققان الخواص التبادلية والتنسيقية والتوزيعية ويمكن برهنت ذلك كالآتي:

ليكن $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathrm{y} = (y_1, \dots, y_k), \mathrm{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن:

1) $\mathrm{x} \mp \mathrm{y} = \mathrm{y} \mp \mathrm{x}$

2) $(\mathrm{x} \mp \mathrm{y}) \mp \mathrm{z} = \mathrm{x} \mp (\mathrm{y} \mp \mathrm{z})$

3) $\alpha\,.\left(\mathrm{x} \mp \mathrm{y}\right) = \alpha.\mathrm{x} \mp \alpha.\mathrm{y}$

البرهان:

1) بما أن $\mathrm{x} \mp \mathrm{y} = (x_1 \mp y_1, \dots, x_k \mp y_k)$ ، وبما أن كل من $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ لكل $i = 1,2, \dots, k$ فإن $x_i \mp y_i = y_i \mp x_i$ لكل $i = 1,2, \dots, k$ ، إذا :

$$\mathrm{x} \mp \mathrm{y} = (y_1 \mp x_1, \dots, y_k \mp x_k) = \mathrm{y} \mp \mathrm{x}$$

2) وبالطريقة نفسها:

$$(x_1 \mp y_1, \dots, x_k \mp y_k) \mp (z_1, \dots, z_k) = ((x_1 \mp y_1) \mp z_1, \dots, (x_k \mp y_k) \mp z_k)$$
$$\Rightarrow \quad (x_1 \mp (y_1 \mp z_1), \dots, x_k \mp (y_k \mp z_k)) = \mathrm{x} \mp (\mathrm{y} \mp \mathrm{z})$$

3) من التعريف 3-1-1، $\alpha.\left(\mathrm{x} \mp \mathrm{y}\right) = (\alpha.(x_1 \mp y_1), \dots, \alpha.(x_k \mp y_k))$ وبما أن $\alpha.(x_i \mp y_i)$ في $\mathbb{R}$ لكل $i = 1,2, \dots, k$ ، فإن $\alpha.(x_i \mp y_i) = \alpha.x_i \mp \alpha.y_i$ لكل $i = 1,2, \dots, k$ وبذلك فإن:

$$\left(\alpha.\left(x_1 \mp y_1\right), \dots, \alpha.\left(x_k \mp y_k\right)\right) = (\alpha.x_1 \mp \alpha.y_1, \dots, \alpha.x_k \mp \alpha.y_k)$$
$$= \alpha.\mathrm{x} \mp \alpha.\mathrm{y}$$

ونود أن نشير هنا إلي أن العنصر الصفري للفضاء $\mathbb{R}^k$ يدعى أحياناً الأصل (origin) أو المتجه الصفري (zero vector) ويرمز له بالرمز $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$، وهو عنصر جميع إحداثياته 0 حيث $0 \in \mathbb{R}$.

مثال (3-1-1):

إذا كان $\mathrm{x} = (2,3,6), y = (-5,1,0) \in \mathbb{R}^3$ و $\alpha = -9$ فأوجد $(\alpha.\mathrm{x}) + \mathrm{y}$.

الحل:

$$(\alpha.\mathrm{x})+\mathrm{y}=\left(-9.(2,3,6)\right)+(-5,1,0))$$

$$\Rightarrow(-18,-27,-54)+(-5,1,0)=(-23,-26,-54)$$

تعريف (3-1-2):

إذا كان x,y عنصرين في $\mathbb{R}^k$ فإننا نعرف $\mathrm{x}.\mathrm{y}$ ضرباً داخلياً (Inner product) كالآتي:

$$\mathrm{x}.\mathrm{y}=\sum_{i=1}^{k}x_i.y_i$$

وأن

$$\|\mathrm{x}\|=(\mathrm{x}\,.\,\mathrm{x})^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{k}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

ويدعى الأخير بالنظيم للعنصر $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^k$.

وبناءً على ذلك فإن الفضاء $\mathbb{R}^k$ مع العمليتين الضرب الداخلي والنظيم يعرف بالفضاء الإقليدي ذو البعد k (4).

مبرهنة (3-1-1):

إذا كان $\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\in\mathbb{R}^k$ و α عدد حقيقي فإن (2):

1) $\|\mathrm{x}\|>0$ لكل $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^k$ و $\mathrm{x}\neq 0$

2) $\|\mathrm{x}\|=0\Leftrightarrow \mathrm{x}=0$

3) $\|\alpha.\mathrm{x}\|=|\alpha|.\|\mathrm{x}\|$ لكل $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^k$

4) $\|\mathrm{x}.\mathrm{y}\|\leq\|\mathrm{x}\|.\|\mathrm{y}\|$ لكل $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^k$

5) $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|\leq\|\mathrm{x}\|+\|\mathrm{y}\|$ لكل $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^k$

6) $\|\mathrm{x}-\mathrm{z}\|\leq\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|+\|\mathrm{y}-\mathrm{z}\|$ لكل $\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\in\mathbb{R}^k$

البرهان:

1) من التعريف (3-1-2) مباشرة فإن:

$$\|\mathrm{x}\|=(\sum_{i=1}^{k}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

بما أن x_i^2 عدد حقيقي موجب لكل $i=1,2,\ldots,k$ فإن:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \|x\| > 0$$

2) من التعريف (3-1-2) فإن:

$$\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i^2 = 0 \;\; \forall\, i = 1,2,\dots,k$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$x_i = 0 \quad \forall\; i = 1,2,\dots,k$$

3) بما أن

$$\|\alpha.x\| = (\sum_{i=1}^{k} (\alpha.x_i)^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{k} \alpha^2.x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

وبما أن α^2 عدد حقيقي فإن:

$$(\sum_{i=1}^{k} \alpha^2.x_i^2)^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2.\sum_{i=1}^{k} x_i^2)^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{k} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

ومن ذلك نصل إلى:

$$(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{k} x_i^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|.\|x\|$$

4) إذا كان $y = 0$ او $x = 0$ فإن المتباينة صحيحة ولا يوجد أي شيء يحتاج إلي برهان، أما إذا كان x, y متجهي وحدة، فإن:

$$\|x - y\|^2 = (x - y).(x - y) = (x.x) - 2(x.y) - (y.y)$$
$$= 1 - 2(x.y) + 1 = 2 - 2(x.y)$$

وحيث إن $\|x + y\| \geq 0$، فإن $x.y \leq 1$ ولكن $\|x\|.\|y\| = 1$ إذن:

$$x.y \leq \|x\|.\|y\| \quad \text{.........}❶$$

حيث أن x متجه وحده، فإن $-x$ متجه وحده أيضاً إذاً:

$$1 \geq (-x).y = -(x.y) \quad \Rightarrow \quad x.y \geq -1 \quad \Rightarrow \quad x.y \geq -\|x\|.\|y\| \quad \text{.........}❷$$

من ❶ و ❷ نحصل علي:

$$\|x.y\| \le \|x\|.\|y\|$$

بصفة عامة إذا كان x, y أي متجهين في $\mathbb{R}^k$ فإن:

$$\frac{x}{\|x\|} \;,\; \frac{y}{\|y\|}$$

متجها وحده إذاً:

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}.\frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|.\|y\|}\|x.y\| \le 1 \;\Rightarrow\; \|x.y\| \le \|x\|.\|y\| \quad \forall\; x, y \in \mathbb{R}^k$$

5)

$$(\|x+y\|)^2 = (x+y).(x+y)$$

$$\le \|x\|^2 + 2.\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

أي أن:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

6) من رقم 5 مباشرة فإن :

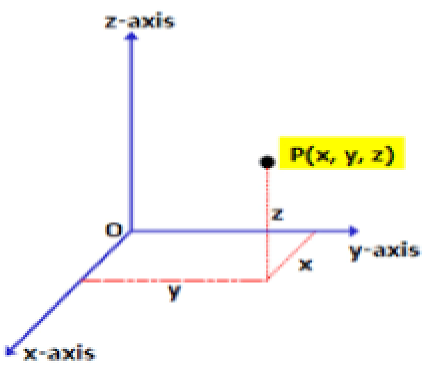
$$\|x-z\| = \|x-y+y-z\|$$

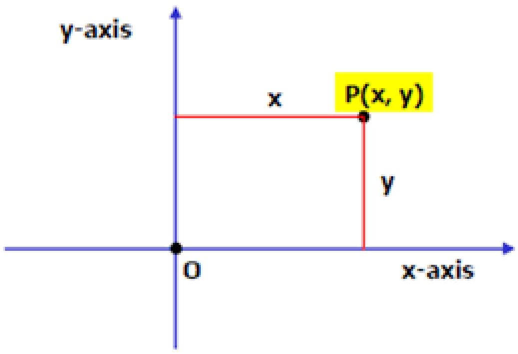
$$\le \;\; \|x-y\| + \|y-z\|$$

إذاً

$$\|x-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\|$$

غالباً ما تسمى $\mathbb{R}$ خط الأعداد الحقيقية (*real line*)، و $\mathbb{R}^2$ يسمي بالمستوى الحقيقي (*real plane*) و $\mathbb{R}^3$ يسمي الفضاء الثلاثي البعد، أو 3D وتمتل بيانياً في الاشكال الآتية:





الشكل 3-1

(2-3) الفضاء المتري ($Metric\ space$):

تعريف (3-2-1):

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}^k$ حيث إن A مجموعة غير خالية ، ولتكن d دالة معرفة كالاتي (8):

$$d: A \times A \to \mathbb{R}$$

فإذا كانت d تحقق الآتي:

1) $d(x,y) \geq 0$ لكل $x,y \in A$.

2) $d(x,y) = d(y,x)$ لكل $x,y \in A$.

3) $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$ لكل $x,y \in A$.

4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ لكل $x,y,z \in A$.

فإن d تدعى دالة المسافة أو الدالة المترية والزوج المرتب (A, d) يسمى بالفضاء المتري.

مثال (3-2-1):

لتكن $A = \mathbb{R}$ و d معرفة كالآتي:

$$d(x,y) = |y - x| \quad \forall \quad x,y \in A$$

برهن أن d دالة مسافة.

الحل:

لنفرض أن $x,y,z \in \mathbb{R}$ فإن:

1) $$d(x,y) = |y - x|$$

نحن نعلم أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي، دائما ما تكون عدداً ليس سالباً وبناءً على ذلك فإن:

$$d(x,y) \geq 0 \text{ لكل } x,y \in A$$

2) $$d(x,y) = |y - x| = |-(x - y)|$$

من المبرهنة (3-3-1) من الفصل الثاني، نصل إلى أن:

$$|-(x - y)| = |x - y| = d(y,x)$$

3) لنفرض أن

$$d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |y - x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - x = 0$$

إذاً

$$x = y$$

4) $$d(x,z) = |z - x| = |z - y + y - x|$$

حسب المتباينة المثلثية فإن:

$$\leq \left|z-y\right|+\left|y-x\right| = d(y,z)+d(x,y)$$

وبناءً على ذلك فإن d دالة مسافة.

مثال (3-2-2):

لتكن $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ وأن d دالة معرفة كالآتي:

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

حيث إن $x,y\in \mathrm{A}$ ، أثبت أن d دالة مسافة.

الحل:

من الواضح أن $d(x,y)=0$ إذاً وفقط إذا كان $x=y$ من شكل الدالة المعرفة، وأن الدالة تأخذ قيمتين هما 1و0 أي أن $\forall\, x,y\in \mathrm{A}$ $d(x,y)\geq 0$، يبقي علينا أن نثبت أن $d(x,y)=d(y,x)$

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases} \Rightarrow \quad d(x,y)=\begin{cases}1, & y\neq x\\ 0, & y=x\end{cases}$$

$$= d(y,x)$$

وأيضاً نريد أن نثبت أن $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ إذا كانت $d(x,z)=1$ فإن هناك ثلاث احتمالات هم:

$$d(x,y)=0\ ,d(y,z)=1 \quad or \quad d(x,y)=1\ ,d(y,z)=0 \ \ or \ \ d(x,y)=1, d(y,z)=1$$

وفي كل الحالات فإن:

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

أما إذا كانت $d(x,z)=0$ فإن هناك أيضاً احتمالين هما:

$$d(x,y)=1\ ,d(y,z)=1 \quad or \quad d(x,y)=0\ ,d(y,z)=0$$

وفي كلتا الحالتين:

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

وبناءً على ذلك فإن d دالة مسافة.

مثال (3-2-3):

لتكن $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ وأن d معرفة كالآتي:

$$d(x,y)=min\{x,y\} \quad \forall\ x,y\in \mathrm{A}$$

هل d دالة مسافة؟

الحل:

نلاحظ أن إذا كان $x=0,y=3$ فإن $x\neq y$ ولكن

$$d(x,y)=min\{0,3\}=0$$

إذاً:

$$d(x,y) = 0$$

لاكن $x \neq y$، وبناءً على ذلك فإن d ليست دالة مسافة.

(3-3) تبولوجيا الفضاء الاقليدي $(The\ Topology\ of\ Euclidean\ space)$:

ذكرنا في بداية هذا الفصل أن التبولوجي الذي سوف ندرسه هو تبولوجي المجموعات والنقاط، ولدراسة هذا الموضوع سنبدأ بالتعريف الآتي:

تعريف (3-3-1):

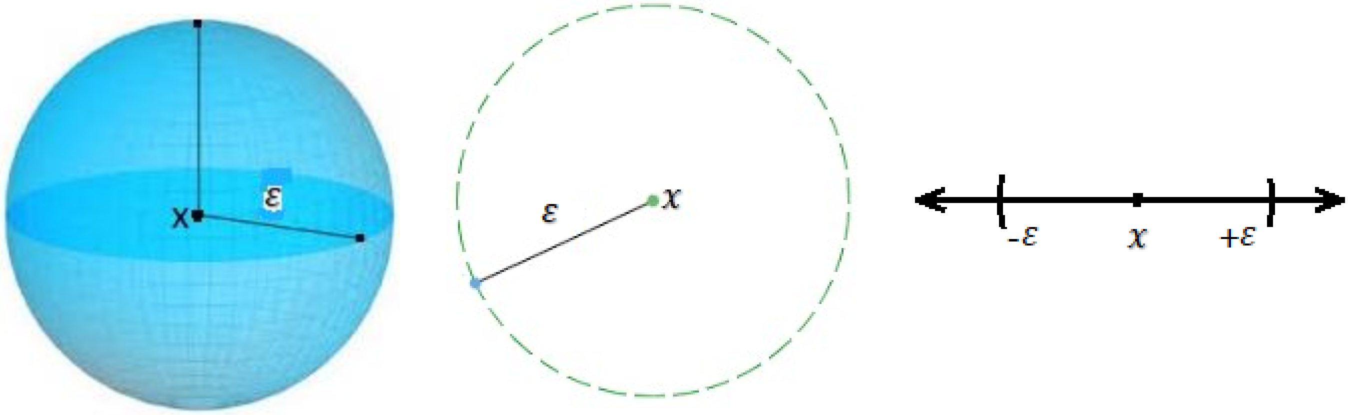
إذا كان $x \in \mathbb{R}^k$, $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي فإن المجموعة:

$$N_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^k : d(x,y) < \varepsilon\}$$

يدعى جوار (Neighorhood) أو كرة مفتوحة (open ball) للنقطة x, حينها نقول أن $N_\varepsilon(x)$ جوار بنصف قطر ε للنقطة $x \in \mathbb{R}^k$ (4).

ملاحظة:

إذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإن جوار النقطة هو عبارة عن فترة مفتوحة ، وإذا كان $x \in \mathbb{R}^2$ فإن جوارها يكون داخل دائرة ، وإذا كان $x \in \mathbb{R}^3$ فإن جوار النقطة هو عبارة عن داخل كرة، كما هو موضح في الأشكال الآتية:



الشكل 3-2

مبرهنة (3-3-1):

إذا كان $x, a \in \mathbb{R}$ وكان $N_\varepsilon(a)$ $\forall$ $x \in N_\varepsilon(a)$ فإن $x = a$ (5).

البرهان:

بما أن:

$$x \in N_\varepsilon(a)\ \forall\ N_\varepsilon(a) \quad \Rightarrow \quad |x-a| < \varepsilon\ \forall\ \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |x-a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-a| = 0$$

ومنها نصل إلى أن:

$$|x-a|=0 \implies x=a$$

(4-3) المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة $(open\ and\ closed\ sets)$:

تعريف (3-4-1):

المجموعة $G \subseteq \mathbb{R}^k$ تسمى مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^k$ إذا كان لكل $x \in G$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث إن كل $y \in \mathbb{R}^k$ و $d(x,y) < \varepsilon$ تكون $y \in G$ ، أي بمعنى لكل نقطة في المجموعة يوجد جوار للنقطة يقع بأكمله داخل المجموعة (3).

مثال (3-4-1):

الفترة المفتوحة (a,b) تكون مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.

مثال (3-4-2):

1) لاحظ أنه من التعريف (3-4-1) أن كل من $\mathbb{R}^k$ و$\emptyset$، هما مجموعتان مفتوحتان وذلك لأن لو اخذنا $\varepsilon = 1$ فإن:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^k \ \Rightarrow\ N_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^k$$

وبذلك فإن $\mathbb{R}^k$ مجموعة مفتوحة ، ولأن $\emptyset$ لا تحتوي على عناصر، فإنها تحقق التعريف أعلاه.

2) المجموعة $G = \{(x,y): x^2+y^2<1\}$ هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$.

3) المجموعة $A = \{(x,y): 0 \le x \le 1\}$ ليست مجموعة مفتوحة.

إن المبرهنة التالية توضح الخواص التي تخضع لها المجموعات المفتوحة.

مبرهنة (3-4-1):

1) تقاطع عدد نهائي من المجموعات الجزئية المفتوحة من $\mathbb{R}^k$ يعطي مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^k$.

2) اتحاد أي تجمع من المجموعات الجزئية المفتوحة من $\mathbb{R}^k$ ، يعطي مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^k$ (2).

البرهان:

1) في حالة العدد المنتهي، يكفي أن نبرهن في حالة مجموعتين مفتوحتين فقط، لنفرض أن A , B مجموعتان مفتوحتان في $\mathbb{R}^k$، ولنفرض أن $C = A \cap B$ ، إذا كانت $C = \emptyset$ فإنها تكون مجموعة مفتوحة من المثال(3-4-2)،

وإذا كانت $C \neq \emptyset$ فإن هناك عنصر $x \in C$ وبما أنه يوجد $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ حيث إن:

$$N_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B \quad , \quad N_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$$

لأن A , B مجموعتان مفتوحتان ، لنفرض أن ε_3 هي أصغر العددين إذا:

$$N_{\varepsilon_3}(x) \subseteq N_{\varepsilon_1}(x) \quad , \quad N_{\varepsilon_3}(x) \subseteq N_{\varepsilon_2}(x)$$

ولهذا فإن:

$$N_{\varepsilon_3}(x) \subseteq A \quad , \quad N_{\varepsilon_3}(x) \subseteq B$$

إذاً:

$$N_{\varepsilon_3}(x) \subseteq \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad N_{\varepsilon_3}(x) \subseteq C$$

وهذا يعني أن C مجموعة مفتوحة.

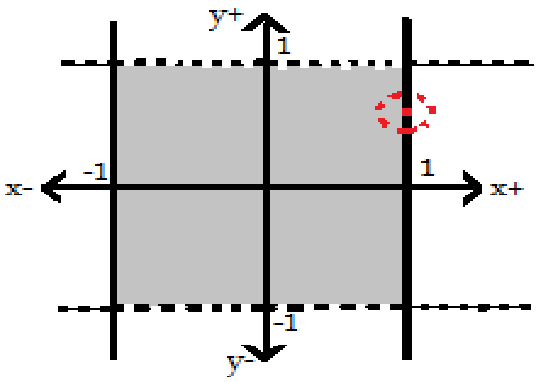
2) لنفرض أن $\{S_\alpha\}$ تجمع من المجموعات المفتوحة، ولنفرض أن $\mathrm{A} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} S_\alpha$ إذا كان $x \in \mathrm{A}$ فإن $x \in S_\alpha$ لبعض α، وهذا يعني أنه إذا كان x في A ، فإنه ينتمي لإحدى المجموعات S_α، ونعلم أن S_α مجموعة مفتوحة لكل α، إذا يوجد $\varepsilon > 0$ حيث أن $N_\varepsilon(x) \subseteq S_\alpha \subseteq \mathrm{A}$ ، ومن التعريف (3-4-1) نصل إلى أن الاتحاد مجموعة مفتوحة.

مثال (3-4-3):

لنفرض أن $\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 < y < 1\}$ وضح أن A ليست مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$.

الحل:

A ليست مجموعة مفتوحة لأنه لا يوجد جوار للنقطة $(1, \mathrm{y})$ لأي y بحيث يكون بكامله داخل المجموعة A.



الشكل 3-3

مبرهنة (3-4-2):

كل جوار هو مجموعة مفتوحة (4).

البرهان:

لتكن x أي نقطة ، وليكن $N_\varepsilon(x)$ جوار للنقطة ، حيث أنه جوار للنقطة x بنصف قطر ε ، لو أخذنا جوار آخر للنطقة، بنصف قطر $\frac{\varepsilon}{2}$ فإنه بالتأكيد يكون داخل $N_\varepsilon(x)$، أي أن:

$$x \in N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subseteq N_\varepsilon(x)$$

وذلك لكل النقاط في الجوار $N_\varepsilon(x)$، أي أن $N_\varepsilon(x)$ مجموعة مفتوحة.

مثال (3-4-4):

لنفرض أن $\mathrm{A} = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ حيث $n \in N$، فإن A مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ، ولكن:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A = \{0\}$$

ليست مجموعة مفتوحة.

إن المثال السابق يوضح أن تقاطع عدد غير منتهي من المجموعات المفتوحة، قد يكون مجموعة غير مفتوحة.

تعريف (3-4-2):

النقطة $P \in \mathbb{R}^k$ هي نقطة داخلية (interior) للمجموعة $E \subseteq \mathbb{R}^k$ إذا وجد جوار $N_\varepsilon(P)$ للنقطة، يقع بأكمله داخل المجموعة $N_\varepsilon(x) \subset E$ (4).

ولتكن $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^k$ فإن مجموعة كل النقاط التي تحقق التعريف أعلاه تدعى بداخلية A، ويرمز لها بالرمز $int(\mathrm{A})$ ، أو بصيغةٍ أخرى هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواه داخل A (4).

مبرهنة (3-4-3):

إذا كان $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^k$ فإن $int(\mathrm{A})$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^k$ (4).

البرهان:

مباشرة من التعريف (3-4-2) فإن $int(\mathrm{A})$ تحوي جميع النقاط بحيث يكون لكل نقطة من هذه النقاط جوار يقع بأكمله داخل المجموعة أي أن:

$$x_i \in N_{\varepsilon_i}(x_i) \subseteq int(A) \quad \forall \ i = 1,2, \dots$$

أي أن $int(\mathrm{A})$ مجموعة مفتوحة.

مبرهنة (3-4-4):

لتكن $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^k$ مجموعة فإن الجمل الآتية تكون متكافئة:

1) B مجموعة مفتوحة .

2) كل نقطة في B تكون نقطة داخلية للمجموعة B .

3) B جوار لكل نقاطها (9).

البرهان:

لنفرض أولاً أن B مجموعة مفتوحة ونريد إثبات أن كل نقطة في B تكون نقطة داخلية للمجموعة، لتكن $x \in \mathrm{B}$ حيث B مجموعة مفتوحة فإن:

$$x \in N_\varepsilon(x) \subseteq \mathrm{B}$$

أي أن $N_\varepsilon(x)$ جوار للنقطة x لكل $x \in \mathrm{B}$، إذا x نقطة داخلية للمجموعة B.

والآن لنفرض أن كل نقطة في B تكون نقطة داخلية للمجموعة B ونريد إثبات أن B جوار لكل نقطها، وبما أن لكل

نقطة في B يوجد جوار يقع بأكمله داخل المجموعة، وبذلك فإن B مجموعة مفتوحة، والآن لنفرض أن $x \in \mathrm{B}$ فإن:

$$\exists \quad x \in N_{\varepsilon}(x) \subseteq \mathrm{B}$$

وبما أن B مجموعة مفتوحة فإنها تمثل أيضاً جوار للنقطة، وبذلك يكون الجزء الثاني من البرهان قد اكتمل، والآن لنفرض أن B جوار لكل نقاطها، حسب المبرهنة (3-4-2) فإن المجموعة B مجموعة مفتوحة.

مبرهنة (3-4-5):

إذا كانت $A, B \subseteq \mathbb{R}^{k}$ فإن:

1) $int(A) \subseteq A$

2) $int(int(A)) = int(A)$

3) $int(A) \cap int(B) = int(A \cap B)$

البرهان:

1) لنفرض أن $x \in int(A)$ ، بما أن $int\ (A)$ محتواه داخل المجموعة A فإن:

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad int(A) \subseteq A$$

2) لنفرض أن $x \in int(int(A))$ ، من رقم 1 فإن:

$$x \in int(A) \quad \Longrightarrow \quad int(int(A)) \subseteq int(A) \qquad ..... ❶$$

ولنفرض أن $x \in int(A)$، وحسب التعريف 3-6 فإن $int(int(A))$ هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواه داخل $int(A)$، ولكن $int(A)$ مجموعة مفتوحة إذا $int(int(A))$ تحتوي على جميع نقاط $int(A)$ وبذلك نصل إلى أن:

$$x \in int(int(A)) \quad \Longrightarrow \quad int(A) \subseteq int(int(A)) \qquad ..... ❷$$

ومن ❶ و❷ نصل إلى أنه:

$$int(int(A)) = int(A)$$

3) بما أن :

$$int(A) \subseteq A \quad , \quad int(B) \subseteq B$$
$$\Longrightarrow \quad int(A) \cap int(B) \subseteq \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$$

وبما أن:

$$int(int(A) \cap int(B)) = int(A) \cap int(B)$$

وبذلك فإن:

$$int(A) \cap int(B) \subseteq int(A \cap B) \quad .....❶$$

وبما أن:

$$A \cap B \subseteq A \quad , \quad A \cap B \subseteq B$$

$$\Longrightarrow \quad int(A \cap B) \subseteq int(A) \quad , \quad int(A \cap B) \subseteq int(B)$$

إذاً

$$int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B) \quad ......❷$$

من ❶ و❷ نستنتج أن:

$$\boldsymbol{int(A) \cap int(B) = int(A \cap B)}$$

قد يتساءل البعض عما إذا كان الاتحاد يحقق الجزء الثالث من المبرهنة السابقة أم لا، إن المثال الآتي يبين أن الاتحاد لا يحقق الشرط.

مثال (3-4-5):

لتكن $A = [0,1], B = [1,2]$ فإن:

$$int(A) = (0,1) \quad , \quad int(B) = (1,2) \quad \Longrightarrow \quad int(A) \cup int(B) = (0,1) \cup (1,2)$$

وأن:

$$A \cup B = [0,2] \quad \Longrightarrow \quad int(A \cup B) = (0,2)$$

وبذلك فإن:

$$int(A) \cup int(B) \neq int(A \cup B)$$

تعريف (3-4-3):

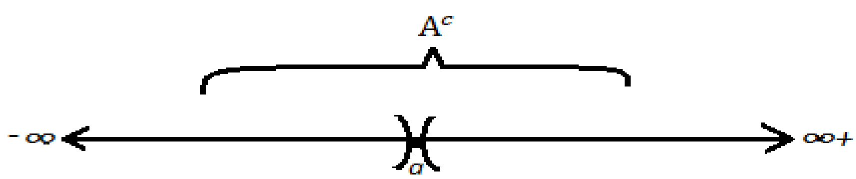
لتكن $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^k$ فإن A مجموعة مغلقة إذا كان A^c مجموعة مفتوحة، حيث أن A^c هي مكملة المجموعة A (2).

مثال (3-4-6):

المجموعة التي تتكون من نقطة واحدة في $\mathbb{R}$ تكون مجموعة مغلقة، ولتكن $\mathrm{A} = \{a\} \subseteq \mathbb{R}$ فإن مكملة المجموعة A هي:

$$\mathrm{A}^c = \mathbb{R} - \{a\}$$

أي أن هذا العنصر فصل المجموعة $\mathbb{R}$ إلى مجموعتين مفتوحتين كما بالشكل:

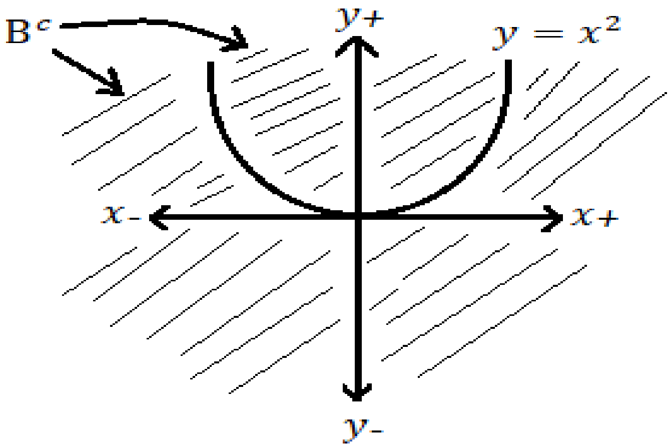


الشكل 3-4

وحسب المبرهنة (3-4-1) فإن A^c مجموعة مفتوحة، وبذلك تكون A مجموعة مغلقة.

2) المجموعة $\mathrm{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\}$ في $\mathbb{R}^2$ تكون مغلقة ، وذلك لأن كل نقطة في B^c يوجد جوار للنقطة يقع بأكمله داخل المجموعة ، وبذلك تكون B^c مجموعة مفتوحة ، ومنها تكون المجموعة B مجموعة المجموعة

مغلقة.



الشكل 3-5

إن للوهلة الأولى قد يعتقد البعض أن المجموعة إما أن تكون مفتوحة أو مغلقة، وهذا غير صحيح لأنه من المحتمل أن تكون هناك مجموعة ليست مفتوحة وليست مغلقة في نفس الوقت، ومثال على ذلك الفترة $[0,1)$ في $\mathbb{R}$.

إن المعلومة السابقة توصلنا إلى أنه حتى وأن عرفنا بأن المجموعة غير مفتوحة فإن هذا لا يعني أنها مغلقة، إن المبرهنة الآتية توضح الخواص التي تخضع لها المجموعات المغلقة.

مبرهنة (3-4-6):

1) اتحاد عدد نهائي من المجموعات الجزئية المغلقة في $\mathbb{R}^k$ يعطي مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^k$.

2) تقاطع أي تجمع من المجموعات الجزئية في $\mathbb{R}^k$ يعطي مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^k$ (2).

البرهان:

إن برهان هذه المبرهنة يعتمد على المبرهنة (3-4-1).

1) يكفي أن نبرهن في حالة العدد المنتهي مجموعتين مجموعتين فقط ، لتكن A_1, A_2 مجموعتان مغلقتان ، هذا يعني أن $A_1^c\ ,A_2^c$ مجموعتان مفتوحتان، وبما أن:

$$(A_1\cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$$

حسب المبرهنة (3-4-1) فإن $A_1^c\cap A_2^c$ مجموعة مفتوحة إذاً:

$$A_1\cup A_2$$

مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^k$ حسب التعريف (3-4-3).

2) لنفرض أن $\{A_1, A_2, \dots\}$ تجمع من المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}^k$ وأن A_i^c مجموعة مفتوحة لكل $i\in N$، بما

أن:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots)^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} {A_i}^c$$

وبما أن:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} {A_i}^c$$

مجموعة مفتوحة، إذا:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^k$.

ملاحظة:

سبق وأن ذكرنا بأن كلاً من المجموعتين $\mathbb{R}^k, \emptyset$ مجموعتان مفتوحتان، ونعرف أيضاً بأن $(\mathbb{R}^k)^c = \emptyset$ و $\emptyset$ مفتوحة إذاً $\mathbb{R}^k$ مغلقة، وكذلك $\mathbb{R}^k = (\emptyset)^c$ مفتوحة إذاً $\emptyset$ مغلقة.

مثال (3-4-7):

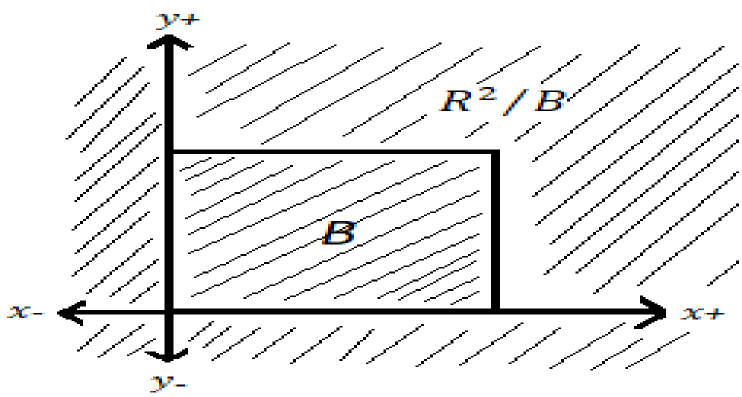
1) وضح أن المجموعة

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le 1\}$$

مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^2$.

الحل:

لاحظ أن $\mathbb{R}^2/B$ مجموعة مفتوحة، لأن أي نقطة في $\mathbb{R}^2/B$ يمكن جعلها في جوار بنصف قطر ε بحيث يكون هذا الجوار بالكامل داخل $\mathbb{R}^2/B$ إذا B مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^2$.



الشكل 3-6

2) المجموعة $\mathbb{R} \supset [a , \infty)$ مجموعة مغلقة، وذلك لأن مكملتها مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.

تعريف (3-4-4):

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}^k$ و $P \in \mathbb{R}^k$ فإن:

1) p نقطة خارجية$(Extrior)$ للمجموعة A إذا وجد جوار للنقطة يقع بأكمله خارج المجموعة ويرمز لها بالرمز $Ext(A)$.

2) p نقطة حدودية $(boundry)$ للمجموعة A ، إذا كان لكل جوار للنقطة يحوي علي نقاط من A و نقاط من A^c ، ويرمز لها بالرمز $bod(A)$ أو $\partial(A)$.

3) p نقطة نهاية $(limit)$ للمجموعة A إذا كان لكل جوار للمجموعة يحوي على الأقل نقطة $q \neq p$ بحيث أن $q \in A$ ويرمز لها بالرمز A' (4).

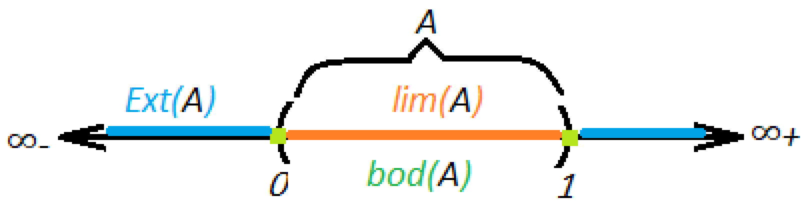
ملاحظة:

إذا كانت p ليست نقطة نهاية عندها فإن p تسمى نقطة معزولة $(isolated\ point)$ للمجموعة A (4).

إذا أردنا أن نوجد النقاط الخارجية لأي مجموعة، فإنه ليست كل النقاط التي لا تنتمي للمجموعة هي نقاط خارجية، فمن المحتمل أن تكون هناك نقطة لا تنتمي للمجموعة ولكنها ليست نقطة خارجية، إذاً لكى نقول عن النقطة أنها نقطة خارجية يجب أن تحقق تعريف النقطة الخارجية.

مثال (3-4-8):

المجموعة $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$ نلاحظ أن $bod(A) = \{0,1\}$, $Ext(A) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ ، $lim(A)$=[0,1] وبما أن المجموعة النقاط $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ ليست نقاط نهاية فإن كل نقطة فيها هي نقطة معزولة .



الشكل 3-7

مبرهنة (3-4-7):

إذا كانت $F \subseteq \mathbb{R}^k$ فإن F مغلقة فقط وإذا كان فقط F تحوي جميع نقاط الحدية لها (2).

البرهان:

لنفرض أولا أن F مجموعة مغلقة و $x \in \mathbb{R}^k$ نقطة حدية للمجموعة F ، لنفرض أن $x \notin F$ فإن $x \in F^c$ ولكن F^c مفتوحة تحوي x ولا تحوي نقاط من F وهذا تناقض مع أن x نقطة حدية، إذاً $x \in F$ والآن لنفرض أن F ، تحوي كل النقاط الحدية لها ونفرض أن $x' \notin F$ إذاً x' نقطة ليست في F وليست نقطة حدودية للمجموعة F إذاً x' خارج F .

وبناءً علي ذلك فإنه يوجد جوار للنقطة x' في F^c لكل $x' \in F^c$ فإن:

$$x' \in N_\varepsilon(x') \subseteq F^c$$

$$F^c = \bigcup_{x' \in F^c} N_\varepsilon(x')$$

وبما أن الجوار هو مجموعة مفتوحة، فإن:

$$\bigcup_{x' \in F^c} N_\varepsilon(x')$$

مجموعة مفتوحة، وبذلك تكون F مجموعة مغلقة.

مثال (3-4-9):

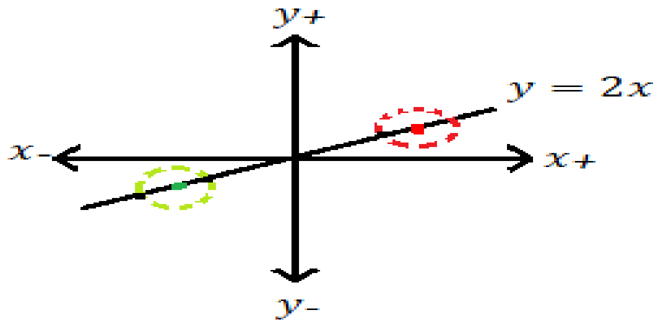
إذا كانت المجموعة

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$$

فإن المجموعة G مجموعة مغلقة.

الحل:

نلاحظ أنه لكل نقطة في المجموعة فإن لكل جوار للنقطة، فإن هذا الجوار يحوي نقاطاً من داخل المجموعة ونقاطاً من خارج المجموعة، أي أن لكل نقطة داخل المجموعة هي نقطة حدودية، أي أن المجموعة G تحوي على النقاط الحدية لها إذا حسب المبرهنة (3-4-7) فإن G مجموعة مغلقة، إن الشكل التالي يوضح بعض تفاصيل الحل.



الشكل 3-8

مبرهنة (3-4-8):

المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}^k$ تكون مغلقة فقط وإذا كان فقط تحوي جميع نقاط النهاية لها (2).

البرهان:

لنفرض أولا أن A مجموعة مغلقة ولنفرض أن $x \in \mathbb{R}^k$ نقطة نهاية للمجموعة A, $x \notin A$ ، المجموعة $U = \mathbb{R}^k/A$ مجموعة مفتوحة تحوي x ، لأن $U \cap A = \emptyset$، وهذا تناقض مع أن x نقطة نهاية، إذاً نستنتج $x \in A$.

ولنفرض الآن أن A تحوي على كل نقاط النهاية لها ، ولنفرض أن $V = \mathbb{R}^k/A$ ، إذا كان $x \in V$ حيث إن x ليست نقطة نهاية للمجموعة A ، فإنه يوجد جوار $N_\varepsilon(x)$ يحقق ما يلي:

$$N_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$

هذا يعني أن:

$$x \in N_\varepsilon(x) \subseteq V$$

إذاً V مجموعة مفتوحة، ومن هنا نصل الى أن A مجموعة مغلقة.

ملاحظة:

إن النقاط الحدية لمجموعة ما يمكن ألا تنتمي للمجموعة، وكذلك نقاط النهاية لها.

تعريف (3-4-5):

لنفرض أن $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ، غلاقة المجموعة A، التي يرمز لها بالرمز $\bar{A}$ ، تتكون من تقاطع كل المجموعات الجزئية المغلقة التي تحوي المجموعة A أي أن (6):

$$\bar{A} = \bigcap \{F: A \subseteq F, \mathbb{R}^k \text{ مجموعة مغلقة في } F\}$$

ملاحظة:

$\bar{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A .

مثال (3-4-10):

إذا كانت $A = (0,1]$ أوجد $\bar{A}$.

الحل:

إن غلاقة المجموعة A هي:

$$\bar{A} = [0,1]$$

وهي أصغر مجموعة مغلقه تحوي A .

مبرهنة (3-4-9):

المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}^k$ مجموعة مغلقة إذا وإذا كان فقط $A = \bar{A}$ (2).

البرهان:

إذا كانت A مجموعة مغلقة، فإن $\bar{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A ، وبالتالي فإن:

$$A = \bar{A}$$

والآن لنفرض $A = \bar{A}$ فإن:

حسب تعريف الغلاقة فإن غلاقة أي مجموعة هي مجموعة مغلقة، وبما أن $A = \bar{A}$ ، وأن $\bar{A}$ مجموعة مغلقة، من ذلك نستنتج أن A مجموعة مغلقة.

مبرهنة (3-4-10):

لتكن $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ فإن (9):

1) $\bar{A} = \overline{(\bar{A})}$

2) $A \subseteq \bar{A}$

3) $\overline{\mathbb{R}^K} = \mathbb{R}^K$ وكذلك $\bar{\emptyset} = \emptyset$

4) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

البرهان:

1) حسب المبرهنة (3-4-9) ، وبما أن $\bar{A}$ مجموعة مغلقة فإن:

$$\bar{A} = \overline{(\bar{A})}$$

2) لنقرض أن $x \in A$ من التعريف فإن $\bar{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوى A أي أن:

$$x \in \bar{A} \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq \bar{A}$$

3) بما أن $\emptyset$ و $\mathbb{R}^k$ مجموعتين مغلقتين فإن من رقم 1 نحصل على:

$$\overline{R^K} = R^K , \bar{\emptyset} = \emptyset$$

4) بما أن $A \subseteq \bar{A} \ , B \subseteq \bar{B}$ إذاً:

$$A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$$

وبما أن $\bar{A} \cup \bar{B}$ مجموعة مغلقة فإن:

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

إذاً

$$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \text{........ ❶}$$

والآن بما أن:

$$A \subseteq A \cup B \implies \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$, \ B \subseteq A \cup B \implies \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

إذاً

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad \text{.........❷}$$

من ❶و❷ نستنتج أن

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

والآن بما أن اتحاد غلاقتين يساوي غلاقة اتحادهم، فهل هذا الكلام متحقق في التقاطع؟ إن المثال التالي فيه الإجابة لهذا السؤال.

مثال (3-4-11):

لتكن $A, B \subseteq \mathbb{R}$ حيث أن $A = (0,1) , B = (1,2)$ فإن:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \overline{(A \cap B)} = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

$$, \quad \bar{A} = [0,1] \ , \bar{B} = [1,2]$$

فإن:

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$$

إذاً

$$\bar{A} \cap \bar{B} \neq \overline{(A \cap B)}$$

نتيجة (3-4-1):

هناك علاقة بين غلاقة المجموعة ونقاط النهاية لها، وهذه العلاقة توضحها المبرهنة (3-4-8) فإن هذه العلاقة تكون (2):

$$A' \subseteq \bar{A}$$

ونحن نعلم أن $A \subseteq \bar{A}$ وبالتالي فإن:

$$A' \cup A \subseteq \bar{A} \qquad \ldots\ldots 1$$

الآن لنفرض أن $x \in \bar{A}$

إذا كان $x \in A$ ، فإن

$$x \in A' \cup A \quad \Longrightarrow \quad \bar{A} \subseteq A' \cup A$$

وإذا كان $x \notin \bar{A}$ فإن هناك جوار للنقطة x يقاطع مع A ويكون الناتج مجموعة تحتوي علي نقطة واحدة تختلف عن x علي الأقل لأن $x \in \bar{A}$.

نستنتج من ذلك أن $x \in A'$ إذا في كلتا الحالتين:

$$\bar{A} \subseteq A' \cup A \qquad \ldots\ldots\ldots 2$$

من 1و2 نستنتج أن:

$$\bar{A} = A' \cup A$$

يمكن أن نعرف أيضاً حدية المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}^k$ هي مجموعة تتكون من كل النقاط التي في تقاطع غلاقة المجموعة A مع غلاقة مكملتها أي أن:

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$$

من العبارة السابقة نلاحظ أن ∂A مجموعة مغلقة.

مثال (3-4-12):

إذا كانت $A = (0,1]$ فأوجد ∂A .

الحل:

$$\bar{A} = [0,1]$$

$$, \quad A^c = (-\infty, 0] \cup (1, \infty) \quad \Longrightarrow \quad \overline{A^c} = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$$

من ذلك نستنتج أن:

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \{0,1\}$$

مثال (3-4-13):

إذا كانت $A = \{0\}$ فإن هذه المجموعة ليس لها نقاط نهاية، ولكن $\partial A = \{0\}$ ، إن هذا المثال يوضح أن النقطة الحدية ليس من الضروري أن تكون نقطة نهاية للمجموعة.

مبرهنة (3-4-11):

كل مجموعة منتهية في $\mathbb{R}$ تكون مغلقة (5).

البرهان:

لنفرض أن A مجموعة منتهية، فإذا كانت $A = \emptyset$ فإنها تكون مجموعة مغلقة لا يوجد شيء يحتاج للإثبات، أما إذا كان $A \neq \emptyset$ فإنه يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

نلاحظ أنه يمكن تقسيم المجموعة A بشكل:

$$A = \{x_1\} \cup \{x_2\}, \dots, \cup \{x_n\}$$

وإن لكل

$$\{x_i\}\ is\ Closed \quad \forall \quad i = 1,2,3, \dots, n$$

وبما أن اتحاد أي عدد منتهي من المجموعات المغلقة يعطي مجموعة مغلقة فإن A مجموعة مغلقة.

المجموعات المتراصة والمترابطة ($Compact\ and\ Connected\ sets$) :

أولاً : (3-5) المجموعات المتراصة ($Compact\ sets$) :

يعد مفهوم التراص المجموعات مفهوماً مهماً جداً، خاصتاً في مواد التحليل الرياضي، وبالخصوص في تفسير مفهوم (النهايات والاستمرارية والاشتقاق).

تعريف (3-5-1):

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}^k$ نعرف الغطاء المفتوح (open caver) للمجموعة A بأنه التجمع $\{U_\alpha\}$ من المجموعات المفتوحة، إذا كان (2):

$$A \subseteq \bigcup U_\alpha$$

وبناءً على هذا التعريف فإننا نعرف المجموعات المتراصة كما يلي:

تعريف (3-5-2):

المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}^k$ تدعى مجموعة متراصة إذا كان لكل غطاء مفتوح للمجموعة A يحتوي على غطاءً جزئياً (sup caver) منتهاً ويغطي A أي أن (2):

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{n} U_\alpha \quad \text{أو} \quad A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$$

مثال (3-5-1):

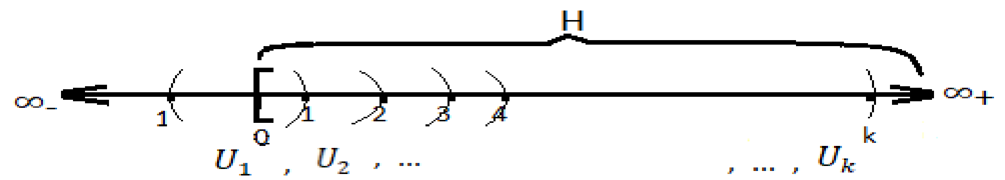
لتكن $H = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ ولتكن $U_\alpha = (-1, \alpha)$ حيث $\alpha \in N$ ، فإن $\{U_\alpha\}$ جماعة من المجموعات المفتوحة حيث إن:

$$H \subseteq \bigcup_{\alpha \in N} U_\alpha$$

ولكن هذه المجموعة لا يمكننا أن نجد غطاءً جزئياً منتهياً يحتويها، وذلك لأنه لو أخترنا غطاءً جزئياً منتهياً، وليكن:

$$G = \bigcup_{\alpha=1}^{k} \{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$$

نلاحظ أن هذه المجموعة لا يمكن أن تكون غطاءً جزئياً للمجموعة H ، وذلك لأنه سوف نجد عنصراً في H ولكنه غير موجود في الغطاء الجزئي، وبذلك فإن المجموعة H غير متراصة.



الشكل 3-9

إن المثال التالي يبين ما إذا كانت مجموعة الأعداد الحقيقية ترث هذه الخاصية أم لا.

مثال (3-5-2):

إن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ غير متراصة لأنه لو اخترنا :

$$U_n = \{(-n, n)\} \quad : \quad n \in N$$

غطاءً مفتوحاً للمجموعة $\mathbb{R}$ ، ولكن لا يوجد عدد منتهي من المجموعات U_n حيث اتحادها يغطي $\mathbb{R}$.

تعد النظرية الآتية من أهم النظريات في التحليل الحقيقي، وبصفةٍ خاصة بموضوع التراص وتُعرف هذه النظرية بنظرية "هايني بوريل".

نظرية "هايني بوريل" *Heine boreal Theorem* :

المجموعة الجزئية المتراصة في $\mathbb{R}^k$ تكون مغلقة ومحدودة (9).

البرهان:

لتكن K مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^k$.

إذا كانت $x \in X$ ليكن $N_\varepsilon(x)$ جوار للنقطة x، ولنفرض أن $y \in K$ وأن $N_\varepsilon(y)$ جوار للنقطة y لنأخذ ε بحيث:

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\|x - y\|$$

حيث أن K متراصة فإنه يوجد n حيث:

$$K \subseteq N_\varepsilon(y_1) \cup N_\varepsilon(y_2) \cup \dots \cup N_\varepsilon(y_n) = U$$

إذا كانت الجوارات المفتوحة المناظرة لـ $N_\varepsilon(y_i)$ هي $N_\varepsilon(x_i)$، وأن:

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} N_\varepsilon(x_i) \implies x \in V \subset \mathbb{R}^k$$

وهذا يعني أن $\mathbb{R}^k/K$ مجموعة مفتوحة، وبذلك فإن K مجموعة مغلقة.

لنفرض أن:

$$\{N_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \quad : \quad x_0 \in \mathbb{R}^k$$

هو غطاء مفتوح لـ K ولكن K متراصة، إذاً:

$$K \subset \bigcup \{N_{n_i}(x_0)\}_{i=1}^{N}$$

لنفرض أن:

$$M = max\{n_i\} \implies K \subseteq N_M(x_0)$$

وهذا يعني وجود M بحيث $\|x - x_0\| \leq M$ لكل $x \in \mathbb{R}^k$، إذاً K محدودة.

مبرهنة (3-5-1):

المجموعة الجزئية المغلقة من المتراصة تكون متراصة.

البرهان:

لنفرض أن A مجموعة متراصة في X وأن B مجموعة جزئية مغلقة من A.

لنفرض أن $\{U_\alpha\}$ غطاء مفتوح للمجموعة B، الغطاء المفتوح $\{U_\alpha \cup (X/B)\}$ يغطي المجموعة A، ولكن المجموعة A متراصة وبذلك يكون هناك غطاء جزئي منتهياً لهذا الغطاء، يغطي A هذا الغطاء المنتهي يغطي B أيضاً، هذا يعني أن:

$$B \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{U_{\alpha_i} \cup X / B\}$$

وهذا يعني أن B متراصة.

مثال (3-5-4):

إذا كانت $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ مجموعتين متراصتين فبرهن أن:

1) $A \cap B$ مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^k$.

2) $A \cup B$ مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^k$.

3) المجموعة $C = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \cup \{0\}$ تكون متراصة.

الحل:

1) ليكن كل من $\{U_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ غطاء للمجموعة B و $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ غطاء للمجموعة A ، بما أن المجموعتين A, B متراصتين، فإنه:

$$\exists\ \{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{n} \quad : \quad A \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{n} U_\alpha = N \quad \wedge \quad \exists\ \{U_\beta\}_{\beta=1}^{m} \quad : \quad B \subseteq \bigcup_{\beta=1}^{m} U_\beta = M$$

$$\Rightarrow\ A \cup B \subseteq N \cup M$$

وهذا يعني أن $A \cup B$ مجموعة متراصة، وبنفس الطريقة نثبت (2).

3) لنفرض أن $\{U_i\}_{i\in I}$ غطاء مفتوح للمجموعة C، ونريد أن نثبت أنه يوجد غطاء جزئي منتهي منه للمجموعة C بما أن:

$$C \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

فإنه يوجد $i_0 \in I$ بحيث أنه يوجد جوار للعنصر 0 بحيث:

$$0 \in N_\varepsilon(0) \subseteq U_{i_0}$$

ولكن 0 نقطة نهاية أي أن كل جوار لها يحتوي على جميع عناصر المجموعة ماعدا عدد منتهي منها، وهذا يعني أن:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right) \subseteq N_\varepsilon(0) \ \Rightarrow\ \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}\right) \not\subseteq N_\varepsilon(0)$$

والذي بقى من عناصر المجموعة C هو عدد منتهي من العناصر، الأن لتكن:

$$1 \in U_{i_1}, \frac{1}{2} \in U_{i_2}, \dots, \frac{1}{n-1} \in U_{i_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} U_{i_\alpha} \cup U_{i_0}$$

ومن ذلك نصل إلى أنه C.

ثانياً : (3-6) المجموعات المترابطة (*Connected sets*):

تعد خاصية الترابط من أهم الخواص التي تتميز بها مجموعة الأعداد الحقيقية، إن التعريف الآتي سيوضح لنا متى تكون المجموعة مترابطة.

تعريف (3-6-1):

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}^k$ يقال إن المجموعة A **غير مترابطة** إذا وجدت مجموعتين مفتوحتين U, V في $\mathbb{R}^K$ منفصلتان بحيث أن:

$$A \cap U \neq \emptyset\ ,\ A \cap V \neq \emptyset\ ,\ A \subseteq U \cup V$$

وخلاف ذلك تكون المجموعة A مترابطة (2).

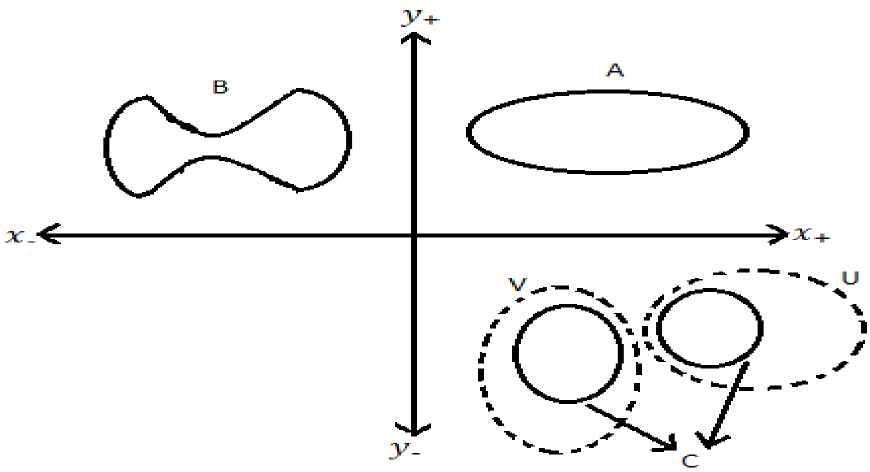
إن مجموعة الأعداد الحقيقية، هي مجموعة مترابطة وكذلك كل فترة فيها.

مثال (3-6-1):

مجموعة الأعداد الصحيحة Z هي مجموعة غير مترابطة لأن:

$$Z \subseteq (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{7}{4}, \infty)$$

وهما مجموعتان مفتوحتان وتقاطعهم مجموعة خالية وأن مجموعة الأعداد الصحيحة جزئية من اتحادهم، ويمكن اختيار نفس المجموعتين المفتوحتين لمجموعة الأعداد الطبيعية N، وبذلك فإن مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة غير مترابطة، تأمل الأشكال الاتية في R^2 :



الشكل 3-10

نلاحظ أن المجموعة A, B هما مجموعتين مترابطتين، وأما المجموعة C فإنها مجموعة غير مترابطة.

مبرهنة (3-6-1):

إذا كانت A مجموعة مترابطة و كانت $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ ، فإن المجموعة B تكون مترابطة كذلك، بصفة خاصة غلاقة المجموعة المترابطة تكون مترابطة (2).

البرهان:

سنبرهن هذه المبرهنة بالتناقض، لنفرض أن B مجموعة غير مترابطة، هذا يعني أن هناك مجموعتين مفتوحتين و منفصلتين U, V بحيث أن:

$$B \subseteq U \cup V\ ,\ \ B \cap U \neq \emptyset\ \ , B \cap V \neq \emptyset$$

حيث إن $A \subseteq B$ ، فإن $A \subseteq U \cup V$ و A مجموعة مترابطة ، فإن ذلك يعني أن A بالكامل داخل U أو بالكامل داخل V .

لنفرض أن $A \subseteq U$ و $A \cap V = \emptyset$ ، نستنتج من ذلك أن:

$$\bar{A} \cap V = \emptyset$$

و ذلك لأنه إذا كان $x \in \bar{A} \cap V$ فإن كل جوار للنقطة x يحتوي نقطة من V و A ، حيث إن V مجموعة مفتوحة، فإن هناك جوار للنقطة x يقع بالكامل داخل V، الذي لا بد أن يحتوي على نقطة من A وهذا مستحيل، إذاً $B \cap V \subseteq \bar{A} \cap V$ وهو يناقض أن Bمجموعة غير مترابطة.

ملاحظة:

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ، إن أكبر مجموعة جزئية مترابطة للمجموعة A تسمى مركبة مترابطة للمجموعة A، من الواضح أنه إذا كانت A مجموعة مترابطة، فإنه يكون لها مركبة مترابطة واحدة فقط وهي المجموعة A نفسها (2).

مبرهنة (3-6-2):

إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}^k$مجموعة جزئية مفتوحة، فإن كل مركبة مترابطة للمجموعة A تكون كذلك مجموعة مفتوحة (2).

البرهان:

لنفرض أن C مركبة مترابطة للمجموعة A و أن $x \in C$ ، حيث إن A مجموعة مفتوحة، فإن هناك جوار للنقطة يحقق:

$$x \in N_\varepsilon(x) \subseteq A$$

وحسب التعريف (3-6-1) $N_\varepsilon(x)$ مجموعة مترابطة، ونعرف أيضاً أن C هي أكبر مجموعة جزئية مترابطة من A ، وهذا يؤدي إلى أن:

$$x \in N_\varepsilon(x) \subseteq C$$

إذاً C مجموعة مفتوحة.

الخاتمة

وفي النهاية نتمنى أن يكون هذا البحث قد قدم جزءاً من الفائدة لطلبة قسم الرياضيات، والغرض الأساسي من القيام به وهو تشجيع الطلبة القسم على القيام ببحوث في هذا المجال وهذا النوع.

وفي النهاية لا يسعنا سوى أن نقول بأن هذا ما منه الله علينا وقدرنا لفعله وما وسعت له جهودنا ، فإن أصبت فمن عند الله، وإن أخطأت فمن نفسي أسأل الله عز وجل بمنه وفضله أن تجعل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم، وأن ينفعني به، وأن ينفع كل من يقرأه، إنه على ذلك قدير، وصلى الله على نبينا محمد وعلى أله وصحبه أجعين.

الباحث

توصيات البحث

تتمثل توصيات البحث فما يلي:

1) إكمال مسيرة هذا البحث، وذلك عن طريق القيام ببحوث مماثلة في هذا المجال، فيما تخص المتتاليات وتقارب المتتالية والنهايات والاستمرارية.

2) تشجيع المشرفين لطلبتهم على تكملة ما بدأه هذا البحث.

3) محاولة الوصول الى حل بشأن مشكلة عزوف طلبة القسم على هذا النوع من البحوث، وخاصةً مادة "التحليل الحقيقي".

فنأمل من الله عز وجل أن يرشدنا لما فيه خير للبلاد والعباد.

الباحث

قائمة المصطلحات العلمية

المصطلح بالإنجليزي	المصطلح بالعربي	المصطلح بالإنجليزي	المصطلح بالعربي
A		Differentid	الاشتقاق
Anti-symmetric	متماثلة تخالفيا	Distance function	دالة مسافة
Absolute	مطلقة	E	
Absolute value	قيمة مطلقة	Element	عنصر
Accumulation point	نقطة التراكم	Empty set	مجموعة خالية
addition	جمع	Equal	يساوي
B		Equivalent	تكافؤ
Ball	كرة	Equivalent relation	علاقة تكافؤ
Binary	ثنائي	Equation	معادلة
Binary operation	عمالية ثنائية	Error Euclidean space	خطأً فضاء اقليدي
Boundary	حدود	Even	زوجي
Boundary point	نقطة حدودية	Example	مثال
Bounded	محدود	Exist	موجود
C		Existence	وجود
Cartesian product	الضرب الديكارتي	Equation	معادلة
Codomain	نطاق مصاحب	Error Euclidean space	خطا فضاء اقليدي
Comparable elements	عناصر قابلة للمقارنة	F	
Complement	مكمل	Function	دالة
Contradiction	تناقص	Family	جماعة-عائلة
Coordinate	إحداثي	Finite	منتهي
Closed set	مجموعة مغلقة	Finite set	مجموعة منتهية
Closure	غلاقة	Field	مجال
Closure of set	غلاقة المجموعة	G	
Coefficients	معاملات	Graph	بيان(رسم)
Compact	متراص	Greatest element	عنصر أكبر
Compact set	مجموعة متراصة	Greatest lower bound	أكبر حد سفلي
Comparison	مقارنة	H	
Completeness	التمام	Hypothesis	فرض
Complex	مركب	I	
Complex number	أعداد مركبة	Image	صورة
Connected	مترابط	Imply	يؤدي إلى
Connected set	مجموعة مترابطة	Induction	استقراء
Cover	غطاء	Infinite set	مجموعة غير منتهية
Continuity	الاستمرارية	Injective function	دالة إحداثية
Countable set	مجموعة قابلة للعد	Intersection	تقاطع
D		Interval	فترة
Disjoint	منفصل	Interior	داخلية
Distributive law	قانون التوزيع	Interior point	نقطة داخلية
Domain	نطاق	Inverse	معكوس
Definition	تعريف	Isolation	منعزل

Isolation point	نقطة معزولة
Integer number	عدد صحيح
L	
Least element	العنصر الأصغر
Least upper bound	أصغر حد علوي
Lower bound	حد سفلي
M	
Mathematical induction	الاستقراء الرياضي
Maximal element	العنصر العظمى
Mathematical system	النظام الرياضي
Minimal element	العنصر الصغرى
Metric space	فضاء متري
N	
Natural number	الأعداد الطبيعية
Necessary condition	شرط ضروري
Neighborhood	جوار
Norm	نظيم
R	
Range	مدى
Relation	علاقة
Range	مدى
Relation	علاقة
Reflexive	عاكسة
Radius	نصف قطر
Rational number	الأعداد قياسية
Real number	الأعداد حقيقية
S	
Sentence	جملة
Set	مجموعة
Subset	مجموعة جزئية
Surjection	فوقية
Symmetric	متماثلة
Sequence	متتاليات
Sub cover	غطاء جزئي
T	
Total order	ترتيب كلي
Transitive	المنتقلة
Total	كلي
Triangular inequality	متباينة مثلثية
Terminal point	نقطة نهائية
Theorem	مبرهنة(نظرية)
topology	تبولوجي
U	
Union	اتحاد
Upper bound	حد علوي
Uncountable set	مجموعة غير قابلة للعد
Unbound	غير محدودة
Unbound set	مجموعة غير محدودة
Uncountable set	مجموعة غير قابلة للعد
V	
Venn diagrams	أشكال فن
Vectors	متجهات
Volume	حجم
Z	
Zero vector	متجه صفري
zero	صفر

قائمة الرموز

الرمز	معنى الرمز	الرمز	معنى الرمز
$\in$	ينتمي إلى	$-\infty$	سالب ما لانهاية
$\notin$	لا ينتمي إلى	$+\infty$	موجب ما لانهاية
$\{\quad\}$	قوس مجموعة	$\forall$	لكل
$\{x_1, x_2, \dots\}$	مجموعة من عناصر $x_1, x_2, \dots$	$\exists$	يوجد
$\{x: \dots\}$	مجموعة كل x حيث	$\nexists$	لا يوجد
$\emptyset$ او $\{\ \}$	مجموعة الخالية	ε	ابسلون، عدد حقيقي صغير موجب
$\cup$	مجموعة الشاملة	R^*	مجموعة الاعداد الحقيقية الموسعة
A'	مكملة المجموعة A	$\sup(A)$	أصغر حد علوي للمجموعة A
N	مجموعة الأعداد الطبيعية	$\inf(A)$	أكبر حد سفلي للمجموعة A
Z	مجموعة الأعداد الصحيحة	$\max(A)$	أكبر عنصر في المجموعة A
Z^+	مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة	$\min(A)$	أصغر عنصر في المجموعة A
Q	مجموعة الاعداد القياسية	$Ext(A)$	نقاط الخارجية للمجموعة A
Q^c	مجموعة الأعداد غير القياسية	$\partial(A)$ او $bod(A)$	النقاط الحدودية للمجموعة A
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية	A'	نقاط النهاية للمجموعة A
$\mathbb{R}^+$	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة	$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$	جماعة من المجموعات
$\mathbb{R}^-$	مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة	$int(A)$	نقاط الداخلية للمجموعة A
$\subseteq$	مجموعة جزئية من	$\bar{A}$	غلاقة المجموعة A
$\nsubseteq$	ليست مجموعة جزئية من	$\lVert x \rVert$	نظيم العنصر x
$\subset$	مجموعة جزئية فعلية	$\sum$	مجموع
$\not\subset$	ليست مجموعة جزئية فعلية	$N_{(\varepsilon)}(x)$	جوار بنصف قطر ε للنقطة x
$\cup$	اتحاد المجموعات	$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$	اتحاد جماعة من المجموعات
$\cap$	تقاطع المجموعات	$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$	تقاطع جماعة من المجموعات
$[a, b]$	فترة مغلقة	$\mathrm{P}(A)$	مجموعة القوى للمجموعة A
$(a, b]$	فترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة	$\vee$	او
(a, b)	فترة مفتوحة	$\wedge$	و
$=$	يساوي	$A \times B$	ضرب الديكارتي للمجموعتين A، B
$\neq$	لا يساوي	$\mathcal{R}$	علاقة
$\sim$	يكافئ	$a\mathcal{R}b$	a مترابط مع b بالعلاقة $\mathcal{R}$
$<$	أكبر من	D_f	نطاق الدالة f
$\leq$	أكبر من أو يساوي	R_f	مدى الدالة f
$>$	أصغر من	f	دالة
$\geq$	أصغر من أو يساوي	$(R, +, \cdot)$	حقل الاعداد الحقيقية
∞	ما لانهاية	$\Longrightarrow$	ادا كان فإن
$+$	زائد	$\Longleftrightarrow$	فقط ادا كان فقط
$-$	ناقص	$\sqrt{a}$	جدر تربيعي ل a
$\cdot$	ضرب	$\lvert a \rvert$	قيمة المطلقة للعدد a
$\div$	قسمة	$:$	حيث

قائمة المراجع

المراجع العربية:

1) د. رمضان محمد جهيمة، د. علي صالح الرويني . نظرية المجموعات . الطبعة الأولى آذار/مارس/الربيع 2003 أفرنجي . دار الكتب الوطنية / بنغازي - ليبيا.

2) د. رمضان محمد جهيمة . التحليل الحقيقي . الجزء الأول الطبعة الثانية نيسان/ إبريل / الطير 2002 . دار الكتب الوطنية / بنغازي – ليبيا.

3) أ.د. أحمد عبد القادر رمضان، د. طه مرسي العدوي . التوبولوجي العام . جامعة الملك سعود – فرع القصيم كلية العلوم –قسم الرياضيات.

4) وولتر رودن – ترجمة / أ.د. عبد السميع عبد الرزاق الجنابي . مبادئ التحليل الرياضي . بغداد – جامعة المستنصرية . دار الكتاب الجامعي –العين 2002.

5) أ. محمد بن عبد الرحمن القويز، أ. صالح عبد الله السنوسي . مبادئ التحليل الحقيقي . الجزء الأول – الطبعة الثانية / مكتبة الملك فهد الوطنية للنشر 2002.

6) د. عمران قوبا . التحليل 1 (المتتاليات و المتسلسلات، استمرار التوابع واشتقاقها) . الجزء الأول – الطبعة الثانية منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا 2017.

7) د. بروين علي حمادي. الجبر المجرد (الزمر والحلقات). الطبعة الأولى/ المنشورات جامعة عمر المختار – البيضاء – ليبيا – 2005.

المراجع الأجنبية:

8) Ian Craw. Advanced Calculus and Analysis. November-6-2000 Version1.5. Copyright© 2000 by Ian Craw and the University of Aberdeen.

9) Professor "Walter Rudin". Principles of Mathematical Analysis – Third Edition – University of Wisconsin – Madison 1976.