جامعة طرابلس

كلية العلوم – قسم الرياضيات

حول مؤثرات الترتيب التام وتطبيقاتها

قدمت هذه الرساله استكمالاً لمتطلبات الحصول على الإجازة العالية

[الماجستير]

إعداد الطالبة

ريم السنوسي فضيل

إشراف

أ.د. علي محمد عوين

ربيع 2017

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

((هو الذي جعل الشمس ضياء والقمر نوراً وقدره منازل لتعلموا عدد السنين والحساب ماخلق الله ذلك إلا بالحق يفصل الايات لقوم يعلمون))

صدق الله العظيم

سورة لقمان   الأية (20)

المقدمة

ترتكز هذه الرسالة على دراسة الترتيب لما له من أهمية كبيره في مجال الرياضيات التطبيقية ومجالات عدة منها الفيزياء النووية والحاسوب .

وتتكون هذه الدراسة من عدة فصول كما يلي :

الفصل الأول يستعرض أهم التطبيقات لمبدأ العد الأساسي وهو استخدامه في معرفة عدد الطرق التي يتم بها ترتيب مجموعة من العناصر بكل الطرق الممكنه ومنها انتقلنا الى التباديل وهى الطريقه التى يتم بها ترتيب عدد من العناصر في مجموعات ونسمي كل ترتيب من هذه الترتيبات تبديلاً ، كما عرجنا سريعاً على التوافيق حيث لايهمنا الترتيب فيها ، ثم نستعرض التكافؤ وزمر التماثل وهي مجموعة التباديل المعرفه على مجموعة الاعداد الطبيعية ونختم هذا الفصل باستعراض الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$ وأعداد الترتيب والعمليات عليها [1]،[2]،[3] .

في الفصل الثاني نتحدث عن طريقه الترتيب التام حيث قدمنا النظريات لتحديد الشروط المطلوبة لتحديد موقع العنصر المطلوب تعيينه من خلال مجموعه من العناصر التي يجب أن ترتب في نمط محدد في 3 مجموعات ثم عممنا طريقة الترتيب التامه لأى عدد فردي m من المجموعات [4]،[5]،[6] .

اما في الفصل الثالث فنتعرف على مؤثرات الترتيب التام بالتعريفات والنظريات المهمه والأمثلة التوضيحيه [7]،[8].

وفي الخاتمه نعطي بعض المجالات التى قد تستخدم ما توصلنا إليه من نتائج [7]،[9]،[10].

وفي الملحق قدمنا معجماً بالمصطلحات المعربة التى استخدمت في الرسالة .

الفصل الأول
بعض المفاهيم الأساسية

1.1. التباديل والتوافيق

بدأ التطور الحديث للتفكير الرياضي مع مطلع القرن السابع عشر ميلادي و ذلك مع تطور نظرية الاحتمالات ، وفي الفترة نفسها اكتشف العالم الرياضي الفرنسي **بليس باسكال** أداة لحساب التوافيق و هذه الاداة تسمي مثلث باسكال وقد بين باسكال المثلث بحيث يكون كل عدد متساويا لمجموع العددين اللذين يتفرعان منه إلي أعلي، و تسمي هذه الأعداد بالعناصر و ترتب في صفوف و لكل عنصر خانه في صف يتم تحديده عن طريق العد من اليمين الي اليسار .

المثال (1.1)

يوضح المثال أن العدد 20 يظهر في الخانه الرابعه من الصف السابع من المثلث ،وقد وجد باسكال أن العنصر الواقع في الخانه (r+1) من الصف (n+1) هو عدد توافيق n من الأشياء مأخوذه r من المرات C(n,r). إذا كان n=6,r=2 ،فإن عدد التوافيق هو العدد في الخانه الثالثه من الصف السابع (15) ،كما نلاحظ ظهور 15 في الخانه الخامسه من الصف نفسه والسبب هو أن المثلث متماثل ، وبالتالي فالعنصر الواقع في الخانه(r+1) من الصف (n+1) هو دائماً العنصر نفسه الواقع في الخانه(n-r+1) من الصف نفسه .وعليه فإن :

وإذا كانت n=6,r=2 فإن العدد نفسه من التوافيق ممكن إذا أخذت الأشياء اثنين أو أربعه في كل مرة .

التباديل و التوافيق أسماء يعبر بها علماء الرياضيات عن مجموعة معينه من الأشياء أو الرموز ، و التباديل ترتيبات منظمة لمجموعة من الأشياء ،أما التوافيق فهي تلك المجموعات التي تتضمن الأشياء نفسها بغض النظر عن الترتيب .....[1]

1.1.1.مبدأ العد

اذا أمكن أجراء حدث ما بطرق عددها (m) و أمكن اجراء حدث أخر بطرق عدد (n) فأنه يمكن اجراء الحدثين معاً بطرق عددها $m \times n$.

المثال(2.1)

طالب يمكنه الذهاب الي المدرسة بثلاث طرق و يمكنه العودة بطريقتين فبكم طريقة يمكنه الذهاب و العودة ؟

الجواب:

عدد الطرق =3*2=6

ومن أهم التطبيقات لمبدأ العد الأساسي أستخدامه في معرفة عدد الطرق التي يتم بها ترتيب مجموعة ما بكل الطرق الممكنه وفي هذه الحاله نسمي كل ترتيب تبديلاً.

2.1.1.التباديل

نقصد بالتباديل الطريقة التي يتم بها ترتيب عدد من الاشياء في مجموعات فإذا كان لدينا مجموعة تضم 3 عناصر و لتكن A={2,3,4} فإن تباديل هذه المجموعة أي الطرق التي يمكن أن ترتب فيها ؛هي :-

(2,4,3)-(4,2,3)-(3,4,2)-(4,3,2)-(2,3,4)-(3,2,4)

ونسمى كل ترتيب من هذه الترتيبات تبديلاً للمجموعة A .

لاحظ أن عدد تباديل هذه المجموعة المكونة من 3 عناصر يساوي
3!=3.2.1=6

و أذا أردنا أن نجد عدد تباديل المجموعة المكونة من عنصرين سنجد أنه يساوي 2=2.1=!2

و كذلك فإن عدد تباديل المجموعة المكونة من 4 عناصر يساوي $4!=4.3.2.1=24$

لماذا ؟! ...

لنأخذ المجموعة { S = { a , b ,c ,d و ندرس تباديلها الممكنة .

نحن نستطيع أن نختار العنصر الأول بـ4طرق . فأذا أخترنا العنصر (a) أولا نستطيع أن نختار العنصر الثاني بـ 3 طرق فقط ،كما انه أذا أخترنا العنصر (b) ثانيا نستطيع أن نختار العنصر الثالث بطريقتين فقط،وإذا أخترنا العنصر (c) ثالثا نستطيع أن نختار العنصر الرابع بطريقه واحدة فقط .أي أن عدد طرق الأختيار هي :

$$4!=4.3.2.1=24$$

تعتبر التباديل من أهم التطبيقات لمبدأ العد الاساسي يستخدم في معرفة عدد الطرق التي يتم بها ترتيب عناصر مجموعة ما بكل الطرق الممكنة .

مبرهنه (1.1)

أذا كانت A مجموعة منتهية و عدد عناصرها (n) فإن عدد التباديل للمجموعة $A = n!$.

سؤالنا عن عدد مجموعات الأحرف التي يمكن تشكيلها من الأحرف الثلاثة a , b . c هو سؤالنا نفسه عن عدد التباديل الممكنة لثلاثة أشياء يؤخذ 3 منها في كل مرة .

و بالإمكان الاجابة عن هذا السؤال عن طريق :-

1- حصر كل الاحتمالات الممكنة .
2- التفكير الاستنتاجي .
3- أستخدام الصيغ الرياضية .

أولاً-طريقة الحصر

كل ما تحتاجه لأيجاد الجواب هنا هو كتابة كل الاحتمالات الممكنة و من ثم عدها ، و توضح القائمة أدناه وجود ستة أحتمالات ،و بالتالي فهناك 6 تباديل لثلاثة أشياء تؤخذ 3 منها كل مره .

(b,c,a)-(b,a,c)-(c,a,b)-(c,b,a)-(a,b,c)-(a,c,b).

و يمكن أيضا حصر الاحتمالات الممكنة علي هيئة رسم تفرعي غير مقفل يبين خيارات كل خانة .[1]

ثانيا-طريقة التفكير الاستنتاجي

يمكن أيضا أيجاد عدد التباديل بواسطة التفكير الاستنتاجي ، للخانة الأولي 3 خيارات محتملة هي (a , b , c) ولكن من هذه الخيارات خياران آخران فقط لملأالخانة الثانية بمجموع (6=2*3) خيارات ، و مع كل واحد من هذه الاحتمالات السته يوجد خيار محتمل واحد للخانة الثالثة أي بمجموع (6=1*6) ، و لذا فإن عدد احتمالات مجموعات الأحرف تساوي(6=1*2*3) .**[1]**

و اللجوء إلي الاستنتاج أفضل من مجرد حصر التباديل لأن التفكير الاستنتاجي يأخذ في الاعتبار كل الأحتمالات الممكنة بينما قد يغفل أحدها أثناء الحصر ، خاصة إذا كان لدينا عدد كبير من الأشياء .

لنفرض مثلا أن لدينا 26 حرفا {a,b,c,......z}بدلاً من الأحرف الثلاثة {a,b,c}و طلب منا إيجاد أجمالي عدد المجموعات المحتملة و المكونة من 3 أحرف .

نلاحظ أن حصر كل الاحتمالات صعب و ممل بينما يمكن ايجاد الجواب بسهولة عن طريق التفكير الاستنتاجي فكل أحتمال من 26 خياراً محتملاً يقع في الخانة الاولي يقابلة 25 خياراً في الخانة الثانية ، و هذا يشكل ما مجموعة 650 أحتمالاً (650=25*26) و لكل من هذه ال 650 خيارا

يتبقي 24 حرفاً محتملاً لشغل الخانة الثالثة ، أي ما مجموعه(15600) تشكيلاً محتملاً (650*24=15600)

و بالتالي فعدد التباديل الاجمالي يساوي(26*25*24=15600) .

يوضح المثال السابق قانون الضرب للتباديل ،فإذا كان يمكن ملألخانة الاولي بـ (**n**) من الطرق و يمكن ملأ الخانة الثانية بـ (**n-1**) من الطرق و الثاثة بـ(**n-2**) من الطرق ويكون عدد التباديل الاجمالي في الخانات الثلاثة يساوي :-

n(n-1)(n-2)

لنفرض أن لدينا مالايقل عن ثلاثة أحرف من الحروف {a,b,c} كم مجموعة يمكن تشكيلها بحيث تتضمن كل مجموعة 3 أحرف من هذه المجموعات (.......... , aaa , baa , bba)وعندئذ يمكن ملأ كل خانه بثلاث طرق مختلفة و بالتالي يمكن حساب النتيجة :-

3*3*3=27 مجموعة.

وفي حالة وجود 26 حرفا بما لا يقل عن ثلاثة من كل منها فانه يمكن تكوين 26 * 26 * 26 =17576 مجموعة .

وبشكل عام يرمز لعدد تباديل (n) من الأشياء مأخوذه منها (r) في كل مرة بالرمز $P(n,r)$

و بأستخدام هذا الرمز يمكن صياغة الاجابة علي مسائل التباديل للأمثله السابقة علي الصورة :

3 أشياء مأخوذه 3 في كل مرة هو

26 شيئا مأخوذه 3 في كل مرة هو

$$\mathbf{P(26,3) = 26.25.24 = 15600}$$

وبصوره عامه فإن:

$$\boldsymbol{P(n,r) = n(n-1) \dots\dots\dots\dots\dots..(n-r+1)}(1.1)$$

فمثلاًإذا كانت n=26,r=3 كما بالمثال الأخير فإن عدد التباديل هو:

$$P(26,3) = 26(26-1)(26-3+1)$$

$$= 26.25.24 = 15600.$$

تعريف(1.1)

يقصد بالتباديل الدائريه انه عدد طرق ترتيب (n) من الأشياء المختلفه حول دائره هو !(n-1) طريقه .[1].

مثال (3.1)

بكم طريقه يمكن لعشرة أشخاص الجلوس حول منضدة دائريه ؟

(n-1)!=(10-1)!=9!=362880.

3.1.1. التوافيق

يقصد بالتوافيق أنه إذا كان لدينا مجموعة من العناصر ،فإي ترتيب يأخذ كل أو بعض العناصر بغض النظر عن الترتيب يسمي توفيقيه، وإذا كان عدد العناصر (n) وأخذت منه (r) بدون مراعاة الترتيب فإن عدد التوافيق يمكن كتابتها بأحدى الأشكال التاليه :

$$C(n,r)=\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots(n-r+1)}{r!} \quad ,n \geq r \geq 0.(2.1)$$

مثال (4.1)

بكم طريقه يمكن تشكيل لجنه مكونه من شخصين من بين خمسه أشخاص؟

$$C(5,2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!.3!}=10$$

مثال (5.1)

بكم طريقه يمكن اختيار لجنتين كل منهما مكونه من 3 أشخاص من بين 12 شخص بحيث أنه لا يجوز لشخص أن يكون موجودا باللجنتين ؟

يمكن اختيار اللجنه الأولي بعدد من الطرق وهي :

$$\mathrm{C}(12,3)=\frac{12!}{3!.9!}=220.$$

ويمكن اختيار اللجنة الثانيه من العدد المتبقي من بين مجموعة الأشخاص المتبقيه بعدد من الطرق وهي :

$$\mathrm{C}(9,3)=\frac{9!}{3!.6!}=84.$$

وبالتالي يمكن تشكيل اللجنتين معاً بعدد من الطرق وهي :

$$220*84=18480.$$

نلاحظ أن عند إجراء التباديل يهمنا الترتيب لأن كل ترتيبه تختلف عن الأخرى أما في حالة التوافيق فلا يؤخذ الترتيب في الاعتبار ،إي أن التوافيق هو عدد المجموعات الجزئيه التي يمكن تكوينها من (r) من الأشياء من بين (n) من الأشياء بغض النظر عن ترتيبهم .[1]

3.1.التكافؤ

يعد مفهوم التكافؤ من أبرز المفاهيم التي تضمنتها نظرية الاعداد،ويعود تقديم هذا المفهوم للعالم الألماني جاوس (1777-1855) م ، وهو تعبير

عن قابلية القسمه بأسلوب أكثر مرونه يسمح بدراسه أعمق للخصائص العدديه .

تعريف (2.1)

ليكن n عدد (طبيعي) ،نقول أن العددين الصحيحين a,b متكافئين بقياس n إذا كان $n|(a-b)$ ونكتب $a \equiv b(mod\ n)$ وهذا يعني أن للعددين a,b نفس الباقي عند قسمتهما علي n.أما إذا كان nلايقسم(a-b) ،فنكتب $a \not\equiv b(mod\ n)$.

مثال (6.1)

1. $15 \equiv 3(mod\ 2)$ لان الفرق 3-15 يقبل القسمه علي 2 .
2. $-9 \not\equiv 2(mod\ 11)$ لان (2-)-9-لاتقبل القسمه علي 11.

مبرهنة (2.1)

ليكن n عدد طبيعي وa,b عددين صحيحين

$a \equiv b(mod\ n)$.1 إذا كان وإذا فقط إذا وجد عدد صحيح k بحيث $a = kn + b$.

2.إذا كان $a \equiv b(mod\ n)$ فإن :

$$\gcd(n,a) = \gcd\ (n,b)$$

حيث gcd تعني القاسم المشترك الأكبر .

البرهان

1.أفرض $a \equiv b(mod\ n)$ ، إذاً n يقسم (a-b) ولذلك (a-b) من مضاعفات n وبالتالي يوجد عدد صحيح k بحيث $a-b = kn$ ، وعلى العكس من ذلك إذا وجد عدد صحيح k بحيث $a = kn + b$ فإن (a-b) يقبل القسمه على n ،حيث k خارج القسمه .

2.أفرض أن $\gcd(n,a)=d$ ، $\gcd(n,b)=e$ إذاً يوجد عدد صحيح k بحيث $a-b=kn$،بالقسمة على d نجد أن :

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{kn}{d}.(3.1)$$

إذاً $\frac{b}{d}$ عدد صحيح لأن الحدين الاخرين أعداد صحيحة ،إذاً d يقسم b وبالتالي $d\le e$. في المقابل أقسم $a-b=kn$ على e نصل إلي أن $d\ge e$، وعليه فإن $d=e$.

خواص جبريه للتكافؤ بمقياس n

بأستخدام التعريف السابق يمكن التحقق من الخواص التاليه وهي :

1.إذا كان a عدد (صحيح) فإن $a\equiv a(mod\ n)$. (خاصية الانعكاس)

2.إذاكان $a\equiv b(mod\ n)$ فإن $b\equiv a(mod\ n)$.(خاصية التماثل)

3.إذا كان $a\equiv b(mod\ n)$ و$b\equiv c(mod\ n)$ فإن

$a\equiv c(mod\ n)$.(خاصية الانتقال)

لذا فإن التكافؤ بمقياس n علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحه Z، وهذه العلاقه تقسم Z إلي n من أقسام التكافؤ وهي :-

$$[0],[1],[2],\dots\dots..[n-1].(4.1)$$

ويرمز لمجموعة هذه الأقسام بالرمز $Z|nZ$ ،والفصل $[a]$هو المجموعة

$$[a]=\{..,a-2n,a-n,a,a+n,a+2n,\dots\}.(5.1)$$

الكثير من الخصائص الأولية للتساوي نجدها متحققه في التكافؤ بمقياسn. [3]

مبرهنه(3.1)

إذا كان $c \equiv d(mod\ n)$ و$a \equiv b(mod\ n)$ فإن :

1.$a + c \equiv b + d(mod\ n)$ (قانون جمع التكافؤات).

2.$ac \equiv bd(mod\ n)$ (قانون ضرب التكافؤات).

3.$a - c \equiv b - d(mod\ n)$ (قانون طرح التكافؤات).

االبرهان

1.الشرط يقتضي أن a-b,c-d يقبلان القسمه على n ولذا مجموعهما (a+c)،(b+d) يقبل القسمه على n وبالتالي فإن :-

$$a + c \equiv b + d(mod\ n).(6.1)$$

2.من المتطابقة :

ac-bd=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d)

نستنتج أن ac-bd يقبل القسمه على n باعتباره حاصل جمع مقدارين

(a-b)(c-d), يقبلان القسمه على n. إذاً$ac \equiv bd(mod\ n)$.

3.بالنسبه لقانون الطرح فهو ليس سوى تطبيق لقانون الضرب على التكافؤين$c \equiv d(mod\ n)$ و$-1 \equiv -1(mod\ n)$؛نستنتج حيث أن$-c \equiv -d(mod\ n)$، ثم بجمع هذا التكافؤ مع $a \equiv b(mod\ n)$

نجد أن $a - c \equiv b - d(mod\ n)$.

ويمكن تعميم قانوني الجمع والضرب بالصورة الاتية :

إذا كان لدينا التكافؤات$i = 1,2, \dots \dots m, a_i \equiv b_i(mod\ n)$ فإن:

$$a_1 + a_2 + \cdots .. a_m \equiv b_1 + b_2 + \cdots b_m(mod\ n).(7.1)$$

$$a_1a_2 \ldots\ldots a_m \equiv b_1b_2\ldots\ldots b_m(mod\ n), m \in Z^+. (8.1)$$

نتيجه (1.1)

إذا كان $a \equiv b(mod\ n)$ فإن $a^m \equiv b^m(mod\ n)$, حيث $m \in Z^+$.

نتيجه (2.1)

إذا كان x عدد (صحيح) فإن $x^3 \equiv x(mod\ 3)$.

النتيجه واضحه عندما x من مضاعفات 3. فيما عدا هذا فإن

$x \equiv \mp1(mod\ 3)$ ،ولاحظ الباقي السالب بديل عن الباقي 2وهذا لأن $2 \equiv -1(mod\ 3)$.

إذاً$x^3 \equiv \mp1(mod\ 3)$ وبالتالي $x^3 \equiv x(mod\ 3)$.

قانون الأختصار

العلاقة $a \equiv b(mod\ n)$ تقتضي أن n يقسم a-b وبالتالي فإن n تقسم $m(a-b) = ma - mb$ وذلك لأن m عدد صحيح ، وهكذا فإن :

$$ma \equiv mb(mod\ n), m \in Z. (9.1)$$

لكن العكس غير صحيح بشكل عام ، لأنه إذا كان n|m(a-b) فليس بالضرورهn|a-b. ولكن إذا كان n,m أوليان نسبياً فهذا شرط كافي لضمان أن n|a-b .كذلك إن كان $ka \equiv kb(mod\ n)$ وكان $\gcd(n,k) = 1$ فإن $a \equiv b(mod\ n)$.

3.1. زمر التماثل

لتكن X مجموعة ولتكن S(X) مجموعة دوال التناظر من X الي X مثل هذه الدوال تسمي تباديل Permutations.[2],[1]

مبرهنة (4.1)

S(X) تمثل زمرة مع العملية ₒ وهي عمليه تركيب التباديل.

البرهان

بفرض f,g ϵ S(X) فإن تركيب التبديلتين f,g هي التبديلة

$$gf: X \to X, g_{\circ}f(x) = g(f(x))$$

عليه فإن :

1.العمليه ₒثنائيةعلي المجموعة S(X) .

2.العمليه ₒ تجميعيه (تنسيقيه) علي المجموعة S(X) وذلك لانه إذا كان f,g,h∈ $S(X)$ فإن :

$$h_{\circ}(g_{\circ}f)=(h_{\circ}g)_{\circ}f.(10.1)$$

3. دالة الوحده$Ix: X \to X, x \to x$ تنتمي الي المجموعه S(X) وتحقق أن :

$$\mathrm{I}_{x\circ}f = f_{\circ}I_x = f \qquad , \quad \forall f \in S(X)(11.1)$$

إي إن دالة الوحدهI_x هي العنصر المحايد بالنسبه لعمليه تركيب التباديل.[2]

4.إذا كانت $f \in S(X)$ فإن f دالة تناظر ومن ثم فإن $f^{-1}: X \to X$ دالة تناظر ايضًا وتحقق ان :

$$f_{\circ}f^{-1}=f^{-1}{\circ}f = \mathrm{I}_x. (12.1)$$

اي ان f^{-1} هو معكوس fبالنسبه لعمليه تركيب التباديل .

وحيث ان $f_{\circ}g \neq g_{\circ}f$ علي وجه العموم فإن عملية تركيب الدوال ليست تبديلية. أذًا S(X) زمرة ليست تبديليه مع عملية التركيب .

تعريف (4.1)

مجموعة التباديل المعرفة علي المجموعة$X = \{1,2 \ldots \ldots. n\}$تسمي زمره التماثل ويرمز لها بالرمز S_n ونكتب اي تبديل$\alpha(i) \in S_n$ بالشكل التالي :

حيث $\alpha(i)$ هي صورة العنصر i ،i=1,2,3........n

ملاحظات

1.إذا كانت

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots\ldots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \ldots\ldots\ldots & \alpha(n) \end{pmatrix}، \beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots\ldots & n \\ \beta(1) & \beta(2) & \beta(3) & \ldots\ldots\ldots & \beta(n) \end{pmatrix}$$

تنتميان إلي S_n ؛فإن :-

$$\beta_{\circ}\alpha= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & n \\ \beta(\alpha(1)) & \beta(\alpha(2)) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \beta(\alpha(n)) \end{pmatrix} (13.1)$$

2. يكون α^{-1} هو معكوسα وذلك بعكس أتجاه الاسهم إي أن :

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha(n) \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & n \end{pmatrix} \in S_n.(14.1)$$

تم نرتب الاعمدة طبقا لترتيب الصف الاول تصاعديًا .

3.عدد عناصر المجموعه S_n هو n! ونكتب $|S_n| = n!$.

4. اذا كانت X={1} فإن $|S_1| = 1$ ومن ثم فإن $S_1 = \{e\}$ حيث :

$e: X \to X, 1 \to 1$ أو نكتب $e=\binom{1}{1}$ ونجد أن $e_\circ e=e$ ومن ثم S_1 زمره تبديليه.

5.إذا كانت X={1,2} فإن $|S_2| = 2$ ومن ثم فإن $S_2 = \{e, \alpha\}$ حيث :

$\alpha=\binom{1\ 2}{2\ 1}$, $e=\binom{1\ 2}{1\ 2}$ ونجد أن :

(15.1) $\qquad \alpha_\circ e=e_\circ\alpha=\alpha, e_\circ e=e. \to \qquad \alpha_\circ\alpha=\alpha,$

ويمكن كتابة جدول الضرب للزمره S_2 كالاتي :

∘	ϱ	α
ϱ	ϱ	α
α	α	ϱ

6. إذا كانت X={1,2,3} فإن $|S_3| = 3! = 6$ ومن ثم فإن :

$S_3 = \{e, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \epsilon\}$ حيث :

$$e=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\1\ 2\ 3\end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 3\ 1\end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\3\ 1\ 2\end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\1\ 3\ 2\end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\3\ 2\ 1\end{pmatrix},$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 1\ 3\end{pmatrix}.$$

مثال (7.1)

إذا كانت $\alpha=\binom{1\ 2\ 3\ 4}{3\ 4\ 2\ 1}$ فإنها تمثل كدوره بالصوره التاليه :

$$\alpha=1\rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$$

أما أذا كانت $\alpha=\binom{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 1\ 4\ 3}$ فإنها تكتب كمحصلة دورات علي الصوره التالية :

$$\alpha= (1\ \ 2)(3\ \ 4)$$

تعريف (5.1)

يقال عن التبديله $\alpha\in S_n$ انها دائريه اذا كانت α تكتب علي شكل دوره تحتوي علي أكثر من عنصر واحد ،وإذا كانت كل دوره للتبديلهα تحتوي عنصرًا واحدًا فقط قيل عن α أنها تبديلة الوحده ونكتفي بكتابة (1) فقط ويعتمد طول التبديلة علي عدد عناصرها .[2]

كما أننا نرمز للدورة بالرمز $(\alpha_1\alpha_2 \ldots\ldots\ldots\alpha_r)$ حيث (r) طول الدورة ونلاحظ أن (r) أيضاً يساوي رتبة الدورة عندما تعتبر كعنصر من S_n.

مثلاً:

رتبة التبديله الدائريه$\alpha=(1\quad 3\quad 5)$ في S_5 يساوي 3 .

مثال (8.1)

لو أخذنا في الأعتبار

$$S_3=\{e,\alpha,\beta,\gamma,\sigma\ ,\epsilon\}$$

وحيث:

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$, \epsilon=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

فإن عناصر S_3 تكتب في صورة دورات كما يلي :

$$S_3=\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 2),(1\ 3),(2\ 3)\}$$

تعريف (6.1)

التبديلتين الدائريتين $A=(a_1a_2a_3\dots\dots\dots a_k)$ و $B=(b_1b_2b_3\dots\dots\dots b_j)$ تسميان منفصلتين اذا كانت المجموعتين $A=\{a_1a_2a_3\dots\dots\dots a_k\}$,$B=\{b_1b_2b_3\dots\dots\dots b_j\}$ منفصلتين (disjoint) اي ان $A\cap B=\varphi$.

مبرهنة(5.1)

اذا كانت $\alpha,\beta\in S_n$ تبديلتين منفصلتين فان $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$

تعريف(7.1)

يقال عن التبديلة $\alpha\in S_n$ أنها ناقله اذا كانت α تبديلة دائرية طولها 2.

ملاحظة

كل تبديلة دائرية يمكن التعبير عنها كمحصلة ناقلات و هذا التعبير ليس وحيداً ،اي أن عدد المناقلات يمكن أن يكون زوجياً أو فردياًحسب α إذا كانت زوجيه أو فرديه.[2]

تعريف (8.1)

الزمرة التي جميع عناصرها تباديل تسمي زمرة تباديل .

لاحظ أن الزمرة الجزئية من زمرة التماثل S_n هي زمرةتباديل .

مثال (9.1)

في الزمرة S_3 نجد ان {e,ϵ},{e,σ},{e,γ},{e,α,β} زمر تباديل وليست زمر تماثل .[2]

تعريف (9.1)

العملية التي يتم من خلالها دوران شكل هندسي حول محور او أنعكاس حول محور تماثل او مستوي بحيث ينطبق الشكل علي نفسه تمامًا تسمي بعملية تحويل .[2]

ملاحظات

1.عملية التحويل للشكل الهندسي المنتظم يمكن تمثيلها بعملية تبديل لمجموعة رؤوس الشكل الهندسي .

2.عمليات التحويل للشكل الهندسي المنتظم حول محور او مستوي تمثل تناظر وتكون زمرة تسمي زمرة التباديل للشكل الهندسي .

مثال (10.1)

في المثلث المتساوي الاضلاع الذي رؤوسه 1,2,3 ومحاور التماثل له هي a_1, a_2, a_3، نري انه يمكن القيام بالعمليات التالية:

e/دوران في إتجاه دوران عقارب الساعة بزاويه 360.

C_3/ دوران في إتجاه دوران عقارب الساعة بزاوية 120 .

C_3^2/ دوران في إتجاه دوران عقارب الساعة بزاويه 240.

ونجد أن مجموعة التناظرات تحتوي علي ثلاثة دورانات وهي:

$e=C_3^3$:التحويل الذي نحصل عليه بدوران المثلث بزاوية 360 حيث $C_3^3 = (1)$.

C_3^2: التحويل الذي نحصل عليه بدوران المثلث بزاوية 240 حيث

$C_3^2 = (1\ \ 3\ \ 2)$.

C_3 : التحويل الذي نحصل عليه بدوران المثلث بزاوية 120 حيث $C_{3=(1\ \ 2\ \ 3)}$.

الزمر الناتجة بهذه الدورانات هي$\{C_3\}$ وتحتوي علي ثلاث انعكاسات وهي:

σ_1 :التحويل الذي نحصل عليه بانعكاس المثلث حول a_1 حيث $\sigma_{1=(2\ \ 3)}$ والزمرة الناتجة بهذا الانعكاس هي $\{\sigma_1\}$.

σ_2 :التحويل الذي نحصل عليه بانعكاس المثلث حول a_2 حيث $\sigma_2 = (1\ \ 3)$والزمرة الناتجة بهذا الانعكاس هي$\{\sigma_2\}$.

σ_3 :التحويل الذي نحصل عليه بانعكاس المثلث حول a_3 حيث $\sigma_{3=(1\ \ 2)}$والزمرة الناتجة بهذا الانعكاس هي$\{\sigma_3\}$.

ومنها نستنتج ان زمرة التماثل للمثلث هي S_3 .

مثال (11.1)

بالنسبة للمربع الذي رؤوسه 1,2,3,4 ومحاور تماثله هي :

$$a_{24}\ , a_{13}, cd, ab.$$

ونرى أنه يمكن القيام بالعمليات الاتية :

C_4 دوران في إتجاه دوران عقارب الساعة بزاوية 90.

C_4^2 دوران في إتجاه دوران عقارب الساعة بزاوية 180 .

C_4^3 دوران في إتجاه دوران عقارب الساعة بزاوية 270 .

$e = C_4^4$ دوران في إتجاه دوران عقارب الساعة بزاوية 360 .

ونجد أن مجموعة التناظرات تحتوي علي 4 دورانات وهي :

C_4 :التحويل الذي نحصل عليه بدوران المربع بزاوية قدرها 90 في إتجاه دوران عقارب الساعة حيث $C_4 = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$.

C_4^2 :التحويل الذي نحصل عليه بدوران المربع بزاوية قدرها 180 في إتجاهدورانعقارب الساعة حيث $C_4^2 = (1\ \ 3)(2\ \ 4)$.

C_4^3 :التحويل الذي نحصل عليه بدوران المربع بزاوية قدرها 270 في إتجاه دوران عقارب الساعة حيث $C_4^3 = (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$.

e=C_4^4 :التحويل الذي نحصل عليه بدوران المربع بزاوية قدرها 360في إتجاه دورانعقارب الساعة حيث $C_4^4 = (1)$.

وتكون الزمرة الناتجة بهذه الدورانات هي $\{C_4\}$ وتحتوي علي أربع أنعكاسات وهي :

α :التحويل الذي نحصل عليه بانعكاس المربع حول cd حيث α=(1 2)(3 4) وزمرة التباديل الناتجة بهذا الانعكاس هي$\langle\alpha\rangle$ ={e,α}.

كذلك التحويلات التي نحصل عليها بانعكاسات المربع حول المحاور a_{24} , a_{13} , ab علي الترتيب وهي :

σ=(1 3) ,$\gamma = (2\ \ 4)$, $\beta = (1\ \ 4)(2\,3)$.

ونجد أن كلا من :

$\langle\sigma\rangle = \{e,\sigma\}, \langle\gamma\rangle = \{e,\gamma\}, \langle\beta\rangle = \{e,\beta\}$.

زمر جزئية من S_4 وهي زمر تباديل وأيضاً نجد أن :

$G = \{e, C_4, C_4^2, C_4^3, \alpha, \beta, \gamma, \sigma\}$ زمر جزئية من S_4 .

4.1. الترتيب

1.4.1. الترتيب في المجموعة R

تعريف (10.1)

ليكن *a,b* عددين حقيقيين ،نقول إن *a* أصغر من أو يساوي *b* ،ونكتب $a \leq b$ إذا كان $a - b \leq 0$ ونقول إن *a* أكبر من أو يساوي *b* ،ونكتب $a \geq b$ إذا كان $a - b \geq 0$.[3]

خصائص

ليكن *a,b,c,d* أعداداً حقيقية، وإذا كان $a \leq b$, $b \leq c$ فإن $a \leq b \leq c$.

أولاً :الترتيب وعملية الجمع

1. إذا كان $a \leq b$ فإن $a + c \leq b + c$.

2. إذا كان $a \leq b, c \leq d$ فإن $a + c \leq b + d$.

ثانياً : الترتيب وعملية الضرب

1.إذا كان $a \leq b$, $c \geq 0$ فإن $ac \leq bc$.

2. إذا كان $a \leq b, c \leq 0$ فإن $ac \geq bc$.

3. إذا كان $0 \leq a \leq b, 0 \leq c \leq d$ فإن $ac \leq bd$.

4. إذا كان $ac \leq bc, c > 0$ فإن $a \leq b$.

5. إذا كان $ac \leq bc, c < 0$ فإن $a \geq b$.

ثالثاً : الترتيب والتربيع

1.إذا كان $0 \le a \le b$ فإن $a^2 \le b^2$.

2. إذا كان $0 \ge a \ge b$ فإن $a^2 \le b^2$.

3. إذا كان $0 \le a \le b$ فإن $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$.

رابعاً : الترتيب والمقلوب

مقلوب العدد a هو $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$

1.إذا كان a, b عددين غير منعدمين ولهما نفس الأشارة وكان $a \le b$ فإن $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$.

2. إذا كان $a \le b < 0$ فإن

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} \to b-a \ge 0, ab \ge 0 \to \frac{b-a}{ab} \ge 0$$
$$\to \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \ge 0 \to \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$$

تعريف (12.1)

العلاقة $\le$ علي المجموعة A تسمي علاقة ترتيب جزئي اذا حققت الخواص التالية:-

1. اذا كان $a \le a$ لكل $a \in A$ (عاكسة).
2. اذا كان $a \le b$ و $b \le a$ فإن $a = b$ (متماثلة تخالفيا) .
3. اذا كان $a \le b$ و $b \le c$ فإن $a \le c$ (انتقالية).

حيث الرمز$\le$ يعني به علاقة وان الزوج $(A, \le)$ يسمي مجموعة مرتبة جزئيا.[3]

تعريف (13.1)

علاقة الترتيب الخطي $\leq^*$ علي المجموعة A هي علاقة ترتيب جزئي علي A واضافة الي ذلك لكل $a, b \in A$ فإن $a \leq^* b$ أو $b \leq^* a$ ،إذا كانت هناك علاقة ترتيب خطي $\leq^*$ علي المجموعة A فإن الزوج $(A, \leq^*)$ يسمي مجموعة مرتبة كلياً وتسمي أيضا سلسلة .

مثال (12.1)

لنفرض أن A مجموعة تعرف علي A العلاقة $\leq$ كما يلي :-
$a \leq b$ إذا وإذا كان فقط $a = b$ لكل $a, b \in A$ لاحظ أن $\leq$ هي علاقة التساوي علي A وهي علاقة ترتيب جزئي ولكنها ليست علاقة ترتيب خطي .

مثال (13.1)

لنفرض أن $C[a, b] = \{f : f[a, b] \to R\}$ مجموعة الدوال المستمرة علي الفترة $[a, b]$ اذا كانت $\leq$ العلاقة علي $C[a, b]$ معرفة كما يلي :-
$\mathrm{f} \leq \mathrm{g}$ إذا وإذا كان فقط $f(x) \leq g(x)$ لكل $x \in [a, b]$ فإن $(C[a, b], \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا ولكنها ليست مرتبة ترتيباً كلياً.

العناصر العظمي و الصغري للمجموعة المرتبة

هناك عناصر في المجموعة المرتبة جزئيا $(A, \leq)$ تلعب دور كبير في تحديد خواص المجموعة $(A, \leq)$ ،لنفرض أن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا ، فإذا كان هناك $a \in A$ حيث $a \leq x$ لكل $x \in A$ فإن a يسمي العنصر الأصغر Least element للمجموعة A بالنسبة لعلاقة الترتيب الجزئي $\leq$.
وكذلك العنصر $c \in A$ يسمي عنصر أصغرى (Minimal element) للمجموعة A بالنسبة لعلاقة الترتيب الجزئي $\leq$ إذا وإذا فقط كان لا يوجد عنصر x في A حيث أن $x < c$ و $x \neq c$.
وبالمثل بالنسبة للعنصر الأكبر للمجموعة المرتبة .

نلاحظ مما سبق أن العنصر الأكبر للمجموعة $(A,\leq)$ هو العنصر الأعظم للمجموعة $(A,\leq)$ ولكن العكس غير صحيح .

تعريف (14.1)

المجموعة $(A,\leq)$ تسمي مجموعة مرتبة جيداً إذا وإذا كان فقط أي مجموعة جزئية غير خالية B من A لها عنصر أصغري .

مثال (14.1)

مجموعة الأعداد الطبيعية N مع علاقة الترتيب $\leq$ مجموعة مرتبة جيداً.[3]

5.1. الأعداد الأساسية

الفكرة الأولية للأعداد الأساسية لها علاقة بحجم المجموعات والقواعد الأساسية التي تتحكم في فكرة الأعداد الأساسية هي :

1.لكل مجموعة A هناك عدد أساسي $Card\ A$ ولكل عدد أساسي a هناك مجموعة A حيث أن $Card\ A = a$.

2.$Card\ A = 0$ اذا وإذا كان فقط $A = \emptyset$.

3.اذا كانت A مجموعة منتهيه إى أن :

$A \sim \{1,2,3 \dots K\}$ حيث $K \in \mathbb{N}$ فان $Card\ A = K$.

4.اذا كانت A و B مجموعتين فان :

$Card\ A = Card\ B$ اذا واذا كان فقط $A \sim B$

حيث ان ~ تكافؤ بين A و B .

6.1. أعداد الترتيب

الأعداد الترتيبية هي فكرة أولية لها القواعد التالية :-

1.لكل مجموعة مرتبة جيداً $(A,\leq)$ هناك عدد ترتيبي يرمز له بالرمز $Ord(A)$ ولكل عدد ترتيبي α هناك مجموعة مرتبة جيداً $(A,\leq)$ حيث أن $Ord(A) = \alpha$.

2.$Ord(A) = 0$ إذا وإذا كان فقط $A = \emptyset$.

3. إذا كانت $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جيداً ومنتهيه أي أن $A = \{1,2, \dots k\}$ فإن $Ord(A) = k$.

4.إذا كانت $(A,\leq)$ و$(B,\leq^*)$مجموعتين مرتبتين جيداً فإن $Ord(A) = Ord(B)$ إذا وإذا فقط كان $A = B$.

عمليات علي الأعداد الترتيبية

تعريف (15.1)

لنفرض أن $(A,\leq_1)$ و $(B,\leq_2)$ مجموعتان منفصلتان مرتبتان جيدا حيث أن:

$$\alpha = Ord(A,\leq_1)\ ,\beta = Ord(B,\leq_2)$$

حاصل الجمع الترتيبي للعددين α وβ هو العدد الترتيبي $Ord(A \cup B,\leq_3)$ أي أن :

$$\alpha+\beta=Ord(A \cup B,\leq_3)$$

في حالة أن $A \cap B \neq \emptyset$ فنكون الجداء الديكارتي $A \times \{0\}$ والجداء الديكارتي $B \times \{1\}$ وتعرف كالتالي :-

$$\alpha+\beta= Ord[(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})]$$

مثال (15.1)

أوجد العدد الترتيبي 3+4 حيث أن :

3=Ord{0,1,2} ، 4=Ord{3,4,5,6}

3+4=Ord{0,1,2,3,4,5,6}=7 .

مبرهنة (6.1)

إذا كان α،β،γ أعداد ترتيبية فإن :

1. $\alpha < \beta$ يؤدي إلي أن $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$

2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

3. $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$ يؤدي إلي أن $\beta=\gamma$.

تعريف (16.1)

لنفرض أن $(A,\leq_1)$ و $(B,\leq_2)$ مجموعتان مرتبتان جيدا وأن

$$\alpha=Ord(A),\beta=Ord(B)$$

فإن حاصل الضرب الترتيبي $\beta\alpha$ هو عدد ترتيبي ويعرف كالاتي :

$$\beta\alpha=Ord(A\times B,\leq^*).$$

مبرهنة (7.1)

إذا كانت α,β,γ أعداد ترتيبية فإن :-

1. $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$.
2. $\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta$.
3. إذا كان $\alpha<\beta$ وكان $\gamma>0$ فإن $\gamma\alpha<\gamma\beta$.
4. إذا كان $\gamma\alpha=\gamma\beta$ فإن $\alpha=\beta,\gamma>0$.[3]

مبرهنة (8.1)

مجموعة الأعداد الترتيبية مجموعة مرتبة جيداً. [3]

البرهان

نفرض أن هناك مجموعة أعداد ترتيبية A غير مرتبة جيداً.

هذا يعني أن هناك مجموعة جزئية B من A ليس لها عنصر أصغري، والمتتالية غير المنتهية التناقصية ... $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\cdots$ يكون محتواه في B .

لاحظ أن هذه المتتالية محتواه أيضا في المجموعة $\{\beta : \beta < \alpha\}$ وبالتالي فإنها مجموعة مرتبة جيدا وهذا تناقض .

إذا مجموعة الأعداد الترتيبية مجموعة مرتبة جيدا.

الباب الثانى
طرق الترتيب التام
Exact Ordering Method

2.1 تقديم

2.2 بعض الاعتبارات

2.3 أمثله توضيحية

2.4 تعميم

2.1 تقديم

سوف نتناول في هذا الفصل طريقة الترتيب التام و بعض النظريات لتحديد الشروط المطلوبة لتوضيح موقع الشئ المطلوبتعيينه من خلال مجموعة العناصر التي يجب أن ترتب في نمط أو أسلوب محدد في ثلاث مجموعات أو فئات ثم يتم تعميم طريقة الترتيب التامه لأي رقم فردي m .

في كلا الحالتين يتم وضع العنصرالمطلوب تعيينه في الوسط (منتصف)المجموعات الأخري.

إذن العنصر المطلوب يتم وضعه تماماً في منتصف الأشياء أخذين في الأعتبار بأننا ننظم العناصرترتيباً منتظماً في(3) مجموعات في الحاله الأولي وفي عدد (m) من المجموعات في الحاله التعميميه الثانيه وأينما كان هناك خطوات محددة ومعرفه يجب أتباعها ؛ وبشكل عام فإن خطوات عددها (m) نحتاجها لتحديد العنصرالمطلوب تماماً عندما تكون (m) رقم فردي للفئات.

ونتعامل مع طريقة الترتيب التي تعطي تحديداً تاماً ومضبوطاً لموقع أو مكان الشئ في مجموعه من الأشياء عددها (n) أخذين في الاعتبار أننا نعرف المجموعه التي ذهب إليها الشئ في كل خطوه من خطوات الطريقه ،ونقصد بذلك أنه اذا كانت (n) قابله للقسمه علي (s) و sهو فردي يمثل عدد ثابت للمجموعات التي تكونت في كل خطوه.

أولاً سوف نقدم للحاله التي تكون فيها (s) تساوي (3) وبعدها نعمم لأي (s) فرديه.[4] ،[5]

2.2 بعض الأعتبارات

لنعتبر أننا نرتب عناصر عددها (n) في مجموعات عددها (s) بالترتيب بحيث ان تعبئه هذه المجموعات تكون بشكل تدريجي ومنتظم بحيث ان العنصر (s+1) يذهب الي المجموعه الاولي والعنصر (s+2) يذهب الي المجموعه التانيه وهكذا.

بعد ان يتم ترتيب كل العناصر فإن المجموعه التي تضم العنصر المطلوب توضع في المركز الأوسط من المجموعات اي ان مركزها هو (s+1/2) بغض النظر عن ترتيب بقيه المجموعات .

لوأخذنا هذه الاعتبارات في الحسبان فإنه بأمكاننا ان نتقدم مع مختلف الحالات،كما يلي :-

الحالة الاولي

نأخذ $n = 3^l$ ونعطي المبرهنه التاليه.

مبرهنه (2.1)

إذا كان لدينا $n = 3^l$ من العناصر مرتبة في ثلاث مجموعات بشكل منتظم وبحيث يتم وضع المجموعه التي تحتوي علي عنصر معين هي الثانيه في كل خطوة .

فإننا نحتاج الى l من الخطوات لتحديد موضع العنصر المطلوب ويكون الموضع هوr يعطي بالعلاقة $r = \frac{(3^l+1)}{2}$.[6]

البرهان

بعد الأنتهاء من الترتيب الاول ووضع المجموعة التي تحتوي العنصر المطلوب كمجموعة ثانية (الخطوه 1) وإذا كان r هو ترتيب العنصر، فإن

وبعد الخطوة 2 يكون لدينا

3^{l-1}

وبعد الخطوة l نحصل على

3^{l-1}

وبعد l من الخطوات نحصل على

$3^{l-1} + 3$

ويمكننا ان نري بسهوله من العلاقة الاخيرة أن :

$n =$

$= 2 \times 3^{l-}$

يوجد اثنين من الامثله الواضحه تحقق المبرهنه السابقه وهي عندما= n، 3^0

$n = 3^1$من العناصر،وتكون أقل وضوح عندما $n = 3^2$ من العناصر .

الحالة الثانية

في هذه الحالة لا نزال نتعامل مع 3 مجموعات ولكن مع $n = 3m_1$ حيث m_1 ليس بالضروره تقبل القسمه على 3 ،اي ان

$m_1 = 3m_2 + k$ حيث $k = 1$ أو 2 والمبرهنه التاليه هي أكثر عمومية في حالة 3 مجموعات .[6]

المبرهنه (2.2)

اذا كان$3^{l-1} < n < 3^{l}, n = 3m_1$وتكون العناصر مرتبة في 3 مجموعات مع مجموعة العنصر المطلوب تعيينه ويوضع ثاني شئ في كل خطوه من الترتيبات ، إذاًنحتاج الى l من الخطوات للترتيب التام للعنصر والموضع يعطي بالعلاقه : .

$r = \frac{(n+1)}{2}$ اذا كانت n فرديه و$r = \frac{n}{2} + 1$ اذا كانت n زوجيه.

البرهان

لنعتبر أن $3^{l-1} < n < 3^{l}, n = 3m_1$ ولذلك بعد الخطوه 1 سوف يضغط العنصر المطلوب الى المركز ضمن عرض الاشياء المساويه m_1 .

الان اذا كان $k = 1\ or\ 2, 3^{l-i-2} < n < 3^{l-i-1}, m_i = 3m_{i+1} + 1$ فإن بعد الخطوه i يتم ضغط العنصر المطلوب الى المركز ضمن أقصي عرض $m_i + 1$.

بعد $(l - 1)$ من الخطوات ، فإن أقصى عرض من الضغط $m_{l-1} + 1$,

$3 > m_{I-1} > 1$. اذا بعد l من الخطوات يصبح العنصر المطلوب في المنتصف.[4]

ملاحظات

1.نلاحظ من المبرهنتين يمكن أن توحدكمبرهنه عامة واحده وتعامل المبرهنه الاولى كحاله خاصة من الحاله العامة ، ومن المفيد أن نشرح كل منهما بمعزل عن الاخرى لنتعرف على أساليب مختلفه ،ونلاحظ ايضا عندما تكون n زوجيه فهناك مركزين.

2.نستطيع دائما ان نجعل العدد n قابلا للقسمه على 3 وذلك عن طريق طرح أو جمع وحدات قليله .

3.نتوقع عوضا عن 3 مجموعات فإن المبرهنتين صالحتين لاى مجموعات بعدد فردى{......,5,7,9,11}.[6]

2.3 أمثله توضيحيه

في هذا البند سوف نتناول أمثله تحقق المبرهنتين السابقتين .

المثال (2.1)

نأخذ $n = 3^2$ من العناصر ونرمز للعنصر المطلوب تعيينه بالرمز β ونفترض بعد الانتهاء من الخطوه 1 يكون لدينا الترتيب التالي :-

cde/βab/fgh

نرتب الان الترتيب كما سبق شرحه فنحصل على :-

cβf/dag/ebh

بعد الانتهاء نضع المجموعة التى تحتوى على العنصر المطلوب في المنتصف للحصول على (الخطوه الثانيه)

dag/cβf/ebh

ونلاحظ ان العنصر المطلوب في الموضع 5 كما حددت المبرهنه (2.1)، ونلاحظ انه يوجد 3 مجموعات .[6]

المثال (2.2)

نأخذ $n = 15 = 3 \times 5$ من المجموعات ونرمز للعنصر المطلوب بالرمز λ .

نفرض ان بعد الانتهاء من الخطوه 1 نحصل على الترتيب :-

ABCDE/FGHIλ/JKLMN

الأن نرتب كما هو منصوص عليه بالمبرهنه لنجد أن :-

ADGλL/BEHJM/CFIKN

وبعد ان نضع مجموعة العنصر المطلوب في المنتصف نحصل على :-

BEHJM/ADGλL/CFIKN

بذلك نكون قد أكملنا الخطوه الثانيه ترتب من جديد ، أى نوزع بإنتظام على المجموعات الثلاثه لنحصل على :-

BJDLI/EMGCK/HAλFN

وبعد الانتهاء نصل إلى (الخطوه الثالثه والأخيره)

BJDLI/HAλFN/EMGCK

ونلاحظ ان العنصر المطلوب تعيينه موجود في الموضع 8 كما تم النص عليهبالمبرهنه(2.2).[6]

4.2 التعميم

في هذا البند سوف نستعرض بعض التعاريف التاليه :

التعريف (2.1)

مجموعة العنصر المطلوب تعيينه يرمز لها بالرمز (roc) وهي المجموعة التى تحتوى العنصر المطلوب .[6]

التعريف (2.2)

خطوة الانتهاء هي عمليه ملء المجموعات بإنتظام ووضع مجموعة العنصر المطلوب تعيينه في المنتصف بغض النظر عن ترتيب المجموعات الأخري .[6]

التعريف (3.2)

عرض مجموعة العناصر هو عدد العناصر في تلك المجموعة .

الأن بعد أن أستعرضنا بعض التعريفات الضروريه ، نتوجه لإعطاء بعض المبرهنات الهامه .

المبرهنه (2.3)

اذا كان $n = m^l$ من العناصر التى سيتم ترتيبها بأنتظام فى m فردي من المجموعات .فإنه لابد من l من الخطوات لتحديد

موضع العنصر المطلوب تعيينه ،والموضع يعطي بالعلاقه $r = \frac{(n+1)}{2}$.

البرهان

من الواضح انه بعد الخطوهi يحصل تقليص في مجموعة العنصر المطلوب تعيينه نحوالمركز ضمن عرض يساوي m^{l-i} وبالتأكيد بعد l من الخطوات سوف يكون العنصر المطلوب في المركز .

مبرهنه (2.4)

اذا كانت $n = m \times s$ ،بحيث $m^{l-1} < n \leq m^l$ و s ليست بالضروره تقبل القسمه على m (m فردى) وترتب العناصر فى m

من المجموعات ،فأننا نحتاج الى l من الخطوات لنحدد موضع العنصر المطلوب تعيينه بالضبط وترتيبهr يعطي بالعلاقه $r = \frac{(n+1)}{2}$ اذا كانت n فرديه و

$r = \frac{n}{2}$ او $r = \frac{n}{2} + 2$ اذا كانت n زوجيه .

البرهان

البرهان هو نتيجه مباشره للمبرهنه السابقه اذا نلاحظ ان الحد الاقصى لعرض مجموعة العنصر المطلوب تعيينه في هذه الحاله يساوى m^{l-i} بعد الخطوهi.[6]

مثال (2.3)

نأخذ $n = 25 = 5^2$ وفقا للمبرهنه (2.3) ،l=2،m=5 وبالتالى العنصر المطلوب يتم الحصول عليه فى الخطوه الثانيه وموقعه 13 .

نرمز للعنصر المطلوب بالرمز β.

ونفترض أنه بعد الخطوه الاولى من الترتيب يكون لدينا

ABCDE /FGHIJ/βLMNO/PQRST/UVWXY

نوزع من جديد علي المجموعات الخمسة (أي نرتب بإنتظام)لنحصل على :

AFβPU/BGLQV/CHMRW/DINSX/EJOTY

بوضع مجموعة العنصر المطلوب في المنتصف نحصل على (الخطوه الثانية) :

BGLQV/CHMRW/AFβPU/DINSX/EJOTY

من الخطوه السابقه نلاحظ ان موضع العنصر المطلوب β هو 13 كما هو متوقع من النظريه (2.3).[5]

مثال (2.4)

بوضع $n = 15 = 5 \times 3$ نرى أن $5 < 15 < 5^2$ ، وفقاً للمبرهنه (2.4) نقوم بتعيين العنصر المطلوب تعيينهفي خطوتين حيث يكون في الموضع 8 ، ولاحظ ان عدد المجموعات هنا سيكون 5.

نفرض ان العنصر المطلوب تعيينه هو A ، بعد الخطوه 1 يصبح الترتيب علي النحو التالي :

bcd/efg/ Ahi/jkl/mno

نقوم بالترتيب بإنتظام في 5 مجموعات لنحصل على :

bgk/cAl/dhm /ein/fjo

نضع مجموعة العنصر A في المنتصف لنحصل على (الخطوه الثانية)

fjo/ein/cAl/bgk/dhm

من الخطوه السابقه نلاحظ ان موقع العنصر المطلوب تعيينه A هو 8 كما هو متوقع من المبرهنه (2.4) . [6]

الفصل الثالث

مؤثرات الترتيب التام

Exact Ordering Operators

1.3 تقديم

3.2 تعريفات مهمة

3.3 تفاصيل

1.3 تقديم

كي نستمر في تفاصيل الترتيب التام لابد لنا من صياغته في شكل نظرية مؤثرية ؛ وهذا يتطلب منا التقديم لتعريفات مهمة ذات علاقة ومن ثم الخوض في تفاصيل تشمل مبرهنات وأمثلة وهذه نوردها فيما يلي .[6]

2.3 تعريفات مهمة

لتكن P مجموعة من $n(=m^l)$ من العناصر (وحيث m عدد فردي)، عندئذ نقدم التعريفات الموالية :-

أ. إن ترتيب $O_m(P)$ لـP هو تبديلة لعناصرها $\{a, b, c, d, \dots.\}$ بحيث تحقق

$$a \equiv b \ (mod\ m) \qquad (3.1)$$

وبواقي الأقسام هي $(\equiv 0)$ m $, e = 1,2,3, \dots \dots.$.

ب. قسم العنصر المطلوب (rec) هو القسم المحتوي على العنصر المطلوب (re) تعيينه بالضبط .

ج. مجموعة عناصر في قسم هي مجموعة عناصر الترتيب $O_m(P)$ في ذلك القسم .

د. طول مجموعة من العناصر (L) هو عدد العناصر في تلك المجموعة ، بذلك فإن طول أي قسم L هو :

$$L = m^{l-1} \qquad (3.2)$$

هـ. ترتيب أي عنصر في أي قسم هو موضعه في ذلك القسم .

و. مركز أي قسم هو ذلك العنصر الذي ترتيبه في القسم هو :

$$\left(\frac{m^{l-1}+1}{2}\right) \qquad (3.3)$$

ز. الترتيب المركزي $O_{mc}(P)$ للترتيب $O_m(P)$ هو تبديلة لـ Pبحيث يكون الباقي للقسم (rec) هو

$$e = \frac{(m+1)}{2} \qquad (3.4)$$

بغض النظر عن ترتيب (أو رتب) الأقسام الأخرى . أي أن البواقي قابلة للتغيير .

ح. يعرف مؤثر الخطوة S بالتأثير المتتال للمؤثرين $O_{mc}(P), O_m(P)$ مرة واحدة ؛ أي أن :-

ط. يعرف الترتيب التام $O_E(P)$ على أنه :-

3.3 تفاصيل

انطلاقاً مما قدمنا له من تعريفات أعلاه ، نمضي قدما في سبيل صياغة نظرية حول مؤثرات الترتيب التام والتي لن تكون كاملة بأي حال من الأحوال . فالتأكيد يحتاج الأمر دراسات مكثفه مستقبلاً .

نسوق الآن المبرهنة التالية :-

مبرهنة (1.3)

اذا كانت P هي مجموعة من $n = m^l$ من العناصر (m فردية)، عندئذ فإن $O_E(P)$ يعين أي عنصر مطلوب تعيينه تماما ويعطى موضعه بالعدد$\frac{n+1}{2}$.

البرهان

من الواضح أن ، التأثير بالمؤثر S^j سوف ينتج تضاغطا للعنصر (re) نحو مركز القسم $(\frac{m+1}{2})$ وواقع خلال طول L_S وحيث

بذلك بالتأثير بالمؤثر $O_E(=S^l)$ ، ينكمش الطول الى :-

وهذا يعني أن العنصر (re) يكون عند المركز .

ملاحظة هامة

يمكن تعميم المبرهنة الى الحالات التى يكون فيها عدد العناصر n بحيث تكون n قابلة للقسمة على m ؛ كما أن :

في هذه الحالة نحتاج للتأثير بالمؤثر $O_E l$ من المرات للحصول على (re) عند المركز . البرهان مشابه للبرهان الذي سقناه آنفا .

مثال (1.3)

لتكن P هي المجموعة $P=\{A,B,C,D,E,F,G,H,\lambda\}$ ، عندئذ نرى أن $n=9=3^2$ ولتكن λهي العنصر المطلوب تحديده تماما .

لرؤية تأثير مؤثرات الترتيب التام ، دعنا نرتب P كما هو موضح بالجدول (1)أسفله :-

الجدول (1)–الترتيب الأول لعناصر المجموعة P .

الان بالتأثير بـ O_3 نحصل على الترتيب المبين في الجدول (2)

الجدول (2) -الترتيب بعد تفعيل O_3 .

لإتمام عملية Sالأولى ، نؤثر بالمؤثر O_{3c}للحصول على الترتيب بالجدول (3)

الجدول (3)–الترتيب بعد عملية S .

مرة أخرى بالتأثير بالمؤثر O_3 نجد أن الترتيب أصبح كما بالجدول (4)أسفله

الجدول (4)–الترتيب بعد التأثير بالمؤثر O_3مرة أخرى

وبالتأثير بـ O_{3C} الآن نحصل على الترتيب النهائي كما بالجدول (5)

الجدول (5)- الترتيب في شكله النهائي بعد استكمال الخطوهS^2 .

عليه ، فقد قمنا بإكمال S^2 من العمليات للوصول الي هذه الخطوه وحيث وجدنا أنالمبرهنه(1.3).[7]،[8]

مثال (2.3)

لتكن $P = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, h, l, m, n, \beta\}$

وحيث نرى أن عدد العناصر هنا هو 15 وحيث $3^2 < 15 < 3^3$بذلك فإننا نتوقع أننا نحتاج إلى S^3 حتى نصل إلى تحديد β تماماً .

لتوضيح ذلك دعنا نفترض أن الترتيب الأول كان هو موضح بالجدول (6) أسفله .

الجدول(6) –الترتيب الأول لعناصر المجموعة بالمثال (2.3)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]					[illegible]		

الجدول (7)- الترتيب بعد تفعيل O_3

1	2	3	4		6	7	8	9	1	1	1	1	1	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]						

لأتمام عملية S الأولى ، نؤثر بالمؤثر O_{3c} للحصول على الترتيب بالجدول (8).

الجدول(8) - الترتيب بعد عملية S

1	2	3	4		6	7	8	9	1	1	1	1	1	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]								

مره اخرى بالتأثير بالمؤثر O_3 نجد أن الترتيب أصبح كما بالجدول (9) اسفله .

الجدول (9)–الترتيب بعد التأثير بالمؤثر O_3 مره اخرى .

1	2	3	4	5	6		8	9	1	1	1	1	1	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]				

وبالتأثير بـO_{3c} الأن نحصل على الترتيب كما في الجدول (10)

الجدول (10)- الترتيب بعد أستكماالالخطوه S^2 .

1		3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1
[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]				

وبالتأثير مره اخرى بالمؤثر O_3 نحصل على الترتيب كما في الجدول (11)

الجدول (11)- بداية الخطوه S^3 لنحصل على الترتيب كما في الجدول

1	2	3	4	5		7	8	9	1	1	1	1	1	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]						

وبالتأثير بـ O_{3C} الآن نحصل على الترتيب النهائي كما بالجدول (12)

الجدول (12)- الترتيب في شكله النهائي بعد استكمال الخطوه S^3 .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]	

ومنه نرى أنه بعد إتمام العملية أصبح β عند المركز ؛ أي أن ترتيبه هو $8 = \frac{15+1}{2}$. كما هو متوقع.

الخاتمة

مما لاشك فيه أن الترتيب له أهمية كبيرة في مجال الرياضيات ؛ كما أنه ربما تتضح له العديد من التطبيقات وخصوصاً للترتيب التام وهنا يحضرنا عدد من المجالات التى قد تستخدم ماتوصلنا إليه من نتائج في هذه الرسالة مثلا في الحواسيب في فرز الملفات أو الإرسال البريدي أو ربما في تصميم كشافات جديدة في الفيزياء النووية كتلك المستخدمة في الكشف عن النيوترونات [7].

ربما أيضا التمكن يوماً ما من استخدام هذه المؤثرات في نظرية الطوبرة والتى تعتبر أحد أهم المواضيع في بحوث العمليات . وأخيراً وليس بآخر يمكن إستخدام طرق الترتيب التام في التسلية في لعب الورق لشخصين أحدهم يلاحظ الورقة المختارة ويدل على القسم الذي وقعت فيه بينما الشخص الآخر يطبق الطريقة ويحدد الورقة تحديدا تاما بعد عدة خطوات عددها مرتبط بما جاء في المبرهنات المختلفة . ويتم ذلك بطريقة عمياء . وكما ذكرنا أن بعض المجالات التى ربما أمكن إستخدام طرق ومؤثرات الترتيب التام هي كما يلي :-

أ . ترتيب وتنظيم الملفات في الحواسيب

ترتيب الملفات في الحواسيب من الأمور الهامه لكي تحافظ على ملفات العمل وغيرها من الملفات والصور ، كما يحتاج الجميع الى نظام لترتيب ملفاتهم الإلكترونية مثلما يحتاجوا الى نظام لترتيب ملفاتهم الورقيه ، ولترتيب الملفات أو المجلدات يوجد 4 طرق أساسية إما حسب الأسم الملف أو تاريخ التعديل أو حجم الملف أو حسب نوع الملف والترتييب،وإما ان يكون تصاعديا أو تنازليا .

ب. نظرية الطوبرة

نظرية الطوبرة أو نظرية الأرتال هي دراسة رياضية لصفوف الانتظار (أو الطوابير) ، تمكننا النظرية من التحليل الرياضى للعديد من العمليات ذات الصلة ، بما في ذلك القدوم الى نهاية الطابور والأنتظار في الطابور (عملية التخزين أساساً) وحزمة من مقدمة الطابور من قبل الخادم . تسمح النظرية بأشتقاق وحساب العديد من مقاييس الاداء ، بما في ذلك معدل وقت الأنتظار في الطابور أو النظام والعدد المتوقع ممن ينتظرون أو يتلقون الخدمه واحتمال مواجهة النظام لبعض الحالات كأن يكون فارغاً أو ممتلئاً أو وجود خادم شاغر أو الأنتظار لبعض الوقت حتى يمكنه من تلقى الخدمه .

نظرية الطوبرة عموماً تعتبر فرعاً من بحوث العمليات لأن النتائج تستخدم غالباً عند اتخاذ القرارات التجارية بشأن الموارد اللازمة لتقديم الخدمة . وهي قابلة للتطبيق في طائفة واسعه من الحالات التى قد تواجه في مجال الأعمال المالية والتجارية والصناعية والرعاية الصحيه والخدمات العامه والهندسه . التطبيقات تصادفنا غالباً في حالات خدمة العملاء وكذلك في النقل والاتصالات السلكيه واللاسلكيه .

كما اقترح العالم ديفيد كندال في عام 1953 م طريقة ترقيم لوصف الخصائص المميزة لنموذج الطابور . وقدم كندال طريقه A\B\C والتى نجدها فى كل الأعمال القياسيه الحديثه في نظرية الطوبرة ، ومثل تجيمس ترقيم A\B\C يحدد بعض خصائص نظام الطابور ، بحيث أن A تمثل توزيع الأوقات الفاصله للقدوم و B هي توزيع وقت الخدمه و C تمثل عدد الخوادم .[9]

ج. الكشافات في الفيزياء النووية

هو عبارة عن جهاز كشف له عدة أنواع وأشكال وأحجام ويستخدم في نطاق واسع في كثير من الأماكن الخاصه منها والعامه وأجهزة الكشف تصمم عموماً بناء على مايراد الحصول عليه منها وتتركز أهميتها

والحاجه الماسة لها في كون الانسان محدود الرؤية لما يحيط منه من جسيمات وموجات ونحوها ولعل هذا من أهم الاسباب لصناعتها ولقد توالت الصناعات للكاشفات التي أدت الى تعدد أغراضها وأشكالها ومع تقدم العلوم وتنوع المعارف تم إيجاد مايسمي بكاشفات الاشعاعات .

وهذا النوع من الكاشفات النووية لها عوامل غاية في الاهمية ونذكر باختصار هذه العوامل وهي كالتالي التأين ويعني ذلك قابلية المواد المستخدمة في الكاشفات للتأين وهناك عدة أنواع للتأين ، إضافة لذلك أن تكون المواد المستخدمة أيضاً غير موصلة للكهرباء وذلك لإيجاد التيار الكهربائي الذي يوجد النبضة الكهربية ومن ثم إيجاد المدى الذي يهدف إيجاده لمعرفة سمك الوقاية للكائن الحي وكل شيء يتضرر من الاشعاعات وفيما يلي بعض الأجهزه المصنعة التي تستخدم في الكشف عن الاشعاعات وهي :

1.طريقة الكشف بأقلام أو الواح التصوير .

2.الكاشفات الغازية .

3.الغرفة الفقاعية .

4.الغرفة السحابية .

5.الكاشفات الوميضية .

6. العداد الشراري .

وننوه عموما أن طرق الترتيب بشكل عام مهمه جدا ومتشعبة وتكتسح معظم المجالات فمثلا توجد طريقة ترتيب تواكب عملية تحليل للحل المباشر لمصفوفات النقطه السرجية حبث يتم وضع قيد بسيط على ترتيب في المسألة مع فرضيه على رتب أجزاء المصفوفة وهذه تكون كافية لضمان تواجد التحليل المنشود .[10]

المراجع

أ . المراجع العربية

1 . د. مواري ر. شبيجل ، د. روبرت إموير ، **الجبر العام** (الدار الدولية للاستثمارات الثقافية) سنة 2007

2. د. جون ب. فرالي ، **مقرر أول في الجبر المجرد** (دار العبيكان للنشر والتوزيع) سنة 2014

3. د. علي صالح الرويمي ، د. رمضان محمد جهيمه ، **نظرية المجموعات** (دار الكتاب الجديدة المتحدة) سنة 2003

ب . المراجع بالانجليزية

4. A.W.Awin , **An exact ordering method**,Int.J.Math.Edu.Sci Technol,vol. 15,no.4,pp.537-539, 1984.

5. A.W.Awin ,**An general exact ordering method** , presente of the Australian Mathematical society 34^{th}Annual meeting,Townsville ,1990.

6. A.W.Awin , **on the exact ordering operators and their applications** , International Journal of modeling and Optimization.,vol.4,no.5,pp.358-361 , 2014.

7. M.Bielewicz , S.Kilim, E.Strugalska Gola and M.Szuta, **Yttrium as new threshold detector for fast neutron energy spectrum measurement** , Journal of the Korean physical Society,2011

8. N.H.Shah,R.M.Gor and H.Soni,**Operations Research** ,New Delhi,India,prentice Hall,ch.12,pp.335-371,,2007

9. **Queueing theory** – Wikipedia the free encyc lopedia

http://www.en.wikipedia.org /Queueing – theory

10.An ordering method for the direct solution-pdf

http://www.cs.ubc.ca/rbridson/kktdirect

Abstract

Exact and general exact ordering methods are reviewed. Firstly, the exact ordering method is introduced, and few theorems were given to assign the conditions needed to locate the position of a required object among a group of objects to be ordered in a certain manner in three classes. Secondly, the exact ordering method is generalized to any odd number of classes (m). In both cases and if the required object class is put in the middle of other classes then the required object is located exactly as the object in the middle of all objects provided that we arrange the objects orderly in three groups in the first case and in m groups in the second generalized one and where certain defined steps are to be followed; in general m steps are required to determine the required object exactly and where m is the odd number of classes. The possibility of making the subject more interesting, deeper and handled in a sophisticated manner, through the introduction of exact ordering operators, is then discussed. Finally few different applications are suggested in physics, in operational research ,in sorting files and in postal mailing. Its use as a practical demonstration with playing cards is also mentioned.

الملحق

المصطلحات المعربة

الكلمة	المعنى
A	
جمع	Addition
نفترض	Assume
تطبيقات	Applications
مرتبة	Arranged
C	
حاله	Case
منتصف	Center
المركز الأوسط	Central position
فئة	Class
حواسيب	Computers
تحتوي	Containing
شروط	Conditions
D	
تعريف	Definition
الكاشف	Detector

Disjoint	منفصل
Divisible	قسمة

E

Element	عنصر
Equal	تساوى
Even	زوجي
Exact	تام
Exact ordering	الترتيب التام
Exact ordering operators	مؤثرات الترتيب التام

F

Files	ملفات
Filling	تعبئه
Final stage	الشكل النهائى
First arrangement	الترتيب الأول
Function	دالة

G

Generalization	تعميم
Group	زمره
Group theory	نظرية المجموعات

I

Inequality	علاقة

L

Length	طول
Located	موقع

M

Maximum width	أقصي عرض
Method	طريقة
Minimal element	عنصر أصغري
Middle	وسط

N

Number	عدد

O

Object	عنصر
Odd	فردي
Odd number	عدد فردي
Operator	مؤثر
Operators theors	نظريه مؤثرية
Operational research	بحوث عمليات
Ordering	ترتيب
Orderly	بأنتظام

P

Permutation	تبديلة

Permutations	تباديل
Physics	فيزياء
Position	موضع
Process	عملية
Playing cards	ورق اللعب

Q

Queuing theory	نظرية الطوبرة

R

Required	مطلوب
Required object	عنصر مطلوب
Required element class	قسم العنصر المطلوب
Residues	بواقي
Result	نتيجة

S

Second class	الفئة الثانية
Set	مجموعة
Satisfy	تحقق
Squeezed	ضغط
Step	خطوه
Subtraction	طرح

Symmetric	تماثل
Symmetric groups	زمر التماثل

T

Theorem	مبرهنه
Theory	نظرية
Three class	ثلاث مجموعات
Table	جدول
The center of a class	الترتيب المركزي

U

Units	وحدات

W

Width	عرض