State of Libya	دولــة ليبيا
Ministry of Higher Education	وزارة التعليم العالي
And Scientific Research	والبحث العلمي
Tripoli of University	جامعة طرابلس
Faculty of Education \ Janzour	كلية التربية / جنزور
Department of Mathematics	قسم الرياضيات

بحث مقدم لاستكمال مُتطلبات الحصول على درجة البكالوريوس بعنوان:

التحويلات بدوال أولية في المستوي المركب

Transformations with Elementary Functions in the Complex Plane

إعداد الطالبة:

إبتهال صالح اللافي

إشراف الدكتورة:

عواطف العزابي

العام الدراسي:2021– 2022

الآية القرآنية

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ يرفع الله الذين امنوا منكم والذين أتوا العلم درجات والله بما تعلمون خبير ﴾

صدق الله العظيم

الآية (11) من سورة المجادلة

الاهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ولا تطيب الاخرة إلا بعفوك ...

إلي من كلله الله بالهيبة والوقار ... إلي من علمني العطاء بدون انتظار ... إلى من أحمل أسمه بكل افتخار ... أرجو من الله أن يمد عمرك لترى ثمارا قد حان قطافها بعد طول انتظار

والدي العزيز

إلى منبع الحنان ورمز الحب الصافي ...إلى ينبوع الصبر التفاؤل والأمل

أمي الغالية

إلي قلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة إلي رياحين حياتي إلى من أظهروا إلى ما هو أجمل في حياتي ... إلى شمعة أملي وسندي في الماضي والحاضر والمستقبل

أخوتي

إلي من علموني حروفا من ذهب وأجلي عبارات العلم من صاغوا لنا علمهم حروفا ومن فكرهم منارة تنير سيرة العلم والنجاح إلي أسادتنا الكرام أهدي مشروع تخرجي وخلاصة جهدي ومثابرتي راجيةً بكل أمل أن ينال الرضا

الشكر والتقدير

أول الشكر هو لله عز وجل الذي أعانني ووفقني على إنهاء هذا الجهد المتواضع في هذا البحث كمـا يسعدني أن أتقدم بالشكر والتقدير إلى التي وجهتني وأرشدتني في كل مرحله من مراحل البحث ولم تبخل عليّ بأي نصيحة تفيدني

الدكتورة الفاضلة / عواطف العزابي

وكما أتقدم بالشكر والعرفان بالجميل إلى جميع الأساتذة الأفاضل في الكلية الذين قدموا لي كل العون في سبيل مواصلة دراستي.

والله ولي التوفيق

الـملخـص

تعد الأعـداد الـمـركبة امتداداً للأعـداد الـحقيقيـة، والـتي تحوى على جميع جذور المعادلات الـتربيعيـة، حيث يـمكـن إجـراء كافـة الـعمليات الرياضية عليها وفق قواعد خاصة لهذه الأعداد، وبذلك نستطيع إيجاد حلول للدوال التي عجزت الأعداد الـحقيقية عــن إيجـاد حــل لها، بالإضافـة الي أنــه بالإمكـان تمـثـيلـهـا بـمتجهـات فـي الـمستـوى الـمركـب.

هدف البحث إلي التطرق لموضوع التحويلات في المستوى المركب بطريقة موسعة، ففي البداية تم التطرق في الفصل الأول إلي تعريفات ومفاهيم أساسية للأعداد المركبة، أما الفصل الثاني تم توضيح الدوال ذات المتغير المركب، أما الفصل الثالث فكان عن التحويلات، حيث تم توضيح بأن الـتحـويـــل (Transformation) للـدوال الـمركبـة يختلف عن التحويلات للدوال الحقيقية فنحتاج للتمثيل البياني للـدالـة الـمركبـة إلى مستويـيـن مركبين مختلفين، هما المستوى z الذي نمثل فيه الاعداد المركبة $z = x + iy$ والـمستـوى w الـذي نمثل فيـه الـنقـط الـمناظـرة $w = u + iv$. وتم معرفة أن التحويـل الخطـي لا يغير من طبيعة الـشكـل فإذا كـان الـشكـل مربـع ينقل بـواسطـة هـذا الـتحويـل إلـي مـربـع وهكـذا. أما تـحويـل دالـة الـقـوى غالباً يتم دراستها بالصيغة القطبية، وانها تحول مقياسها r وسعتها θ في المستوى z الـي الـنقطـة w الـتي مقياسهـا $\rho = r^n$ وسـعـتـهـا $\emptyset = n\theta$. وفـي تحويل دالــة المقلوب صورة دائرة الوحدة هي نفسها دائرة الوحدة وصورة المستقيم المار بنقطة الاصل $z = 0$ هي مستقيم. وبالنسبة الي التحويل ثنائي الخطية له خاصية هامة هـي ان الدوائر والـخطوط الـمستقيمة فـي الـمستـوى z تـنقـل الـى دوائــر وخطوط مستقيمة فـي المستوى w.

الـفـهــرس

INDEX

الفصل الأول

تعريفات ومفاهيم أساسية

للأعداد المركبة

الفصل الثاني

الدوال ذات المتغير المركب

الفصل الثالث

التحويلات بدوال أولية

المقدمة

INTRODUCTION

يعتبر التحليل المركب أحدى الفروع الرئيسية في علم الرياضيات ويشكل أهمية كبيرة جداً في جميع مجالات العلوم الرياضية التي تلعب دوراً كبيرا في بناء المجتمعات الحديثة وأصبح يُدرس في مختلف الجامعات وذلك بسبب أهميته والحاجة الماسة إليه، وبالإضافة الي ذلك أهميته الكبيرة في مختلف التطبيقات الحياتية المهمة وخاصة التطبيقات الفيزيائية والهندسية. أعطى التحليل المركب مكانه متميزة في مناهج الرياضيات في جميع أنحاء العالم، ويتم تدريسه في مستويات تعليمية مختلفة.

يهدف هذا البحث الي تغطية موضوع التحويلات بدوال أولية بشكل واسع وعميق من خلال الأمثلة المدرجة في البحث، وللأهمية الكبيرة لهذا الموضوع فسيكون هذا البحث مهم و سيكون كمرجع في التحويلات بدوال الأولية. لذلك أسأل الله أن يكون مصدراً للعلم واستفادة الجميع.

فاليوم أقدم لكم بحثي تحت عنوان " التحويلات بدوال أولية في المستوي المركب"، وقد تم التطرق في فصول هذا البحث الي مجموعة من المفاهيم والتعاريف والنظريات التي من شأنها ان تكون أساساً للتعمق في هذا الموضوع، بالإضافة الي أمثلة كثيرة في كل فصل لتعزيز وتوضيح ما ورد من تعاريف أو قوانين أو نظريات. وينقسم هذا البحث إلى ثلاثة فصول هما:

الفصل الأول: خصص هذا الفصل للتعريف بأنظمة الأعداد ومن تم التطرق الي نظام الأعداد المركبة وإعطاء مقدمة تاريخية للأعداد المركبة وأهمية الأعداد المركبة في حياتنا، بالإضافة الي التعريف بالعدد المركب والعمليات الاساسية عليه وخصائصه، ومن تم التمثيل البياني للأعداد المركبة، القيمة المطلقة للعدد المركب وبعد ذلك الصورة القطبية للعدد المركب وكيفية الضرب والقسمة في هذه الصورة، درسنا ايضاً سعة العدد المركب، كما تطرقنا الي صيغة اويلر، نظرية دي موافر، إيجاد جذور الأعداد المركبة وفي نهاية هذا الفصل تم التطرق الي المناطق في المستوي المركب.

أما **الفصل الثاني**: فقد خصص لدراسة الدوال ذات المتغير المركب فبدأت في هذا الفصل بتعريف الدالة ذات المتغير المركب، ومن ثم الدالة الاحادية والفوقية، بعد ذلك أنواع الدوال(دالة وحيدة القيمة، دالة متعددة القيمة، دالة العكسية، الدالة المركبة (تركيب الدوال))، وبعد ذلك تم التعريف بxبعض الدوال الأولية المركبة وفي نهاية الفصل تم التطرق الي التمثيل الهندسي للدالة ذات المتغير المركب.

بينما **الفصل الثالث**: فقد خصص لدراسة التحويلات بدوال أولية في المستوي المركب، في البداية تم توضيح معني التحويل، ومن تم التعريف بالتحويل الاحادي، والتحويل العكسي، التحويل المحافظ ، وبعد ذلك تم التطرق الي التحويلات بواسطة الدوال (الدالة الخطية، دالة القوي، دالة المقلوب، الدالة ثنائيه الخطية). كما قمت بوضع امثلة متنوعه ومتعددة لكل نوع من هذه التحويلات، بالإضافة الي توضيح بعض الخواص التي تتعلق ببنود هذا الفصل الغرض منها توسيع مدى فهم القارئ.

الفصل الاول

تعريفات ومفاهيم اساسية للأعداد المركبة

DEFINITIONS AND BASIC CONCEPTS OF COMPLEX NUMBER

في هـذا الفصل سنعرض أنظمـة الأعـداد، بالإضافـة الي مقدمـة تاريخية للأعداد المركبة، والتعريف بالأعداد المركبة، ومن تم ذكر تعريفات ومفاهيم أساسية متعلقة بالأعداد المركبة، وكذلك بعض الامثلة والخواص الأساسية المتعلقة بكل بند.

(1.1) أنظمة الأعداد – Number Systems

قبل ابتكار نظام الأعداد المركبة، كانت هناك عدة أنظمة أعداد أخرى سبقته وهي:

1) **نظام الأعداد الصحيحة (Integer Numbers System)**

يساعد نظام الأعداد هذا في اجراء عملية العد وحل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$x + c = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -c$$

2) **نظام الأعداد الكسرية (القياسية) (Rational Numbers System)**

يمنحنا نظام الأعداد هذا القدرة على حل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$bx + c = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{c}{b} \quad , \quad b \neq 0$$

3) **نظام الأعداد الحقيقية (Real Numbers System)**

يمنحنا نظام الأعداد هذا القدرة على حل المعادلات ذات الشكل التالي:

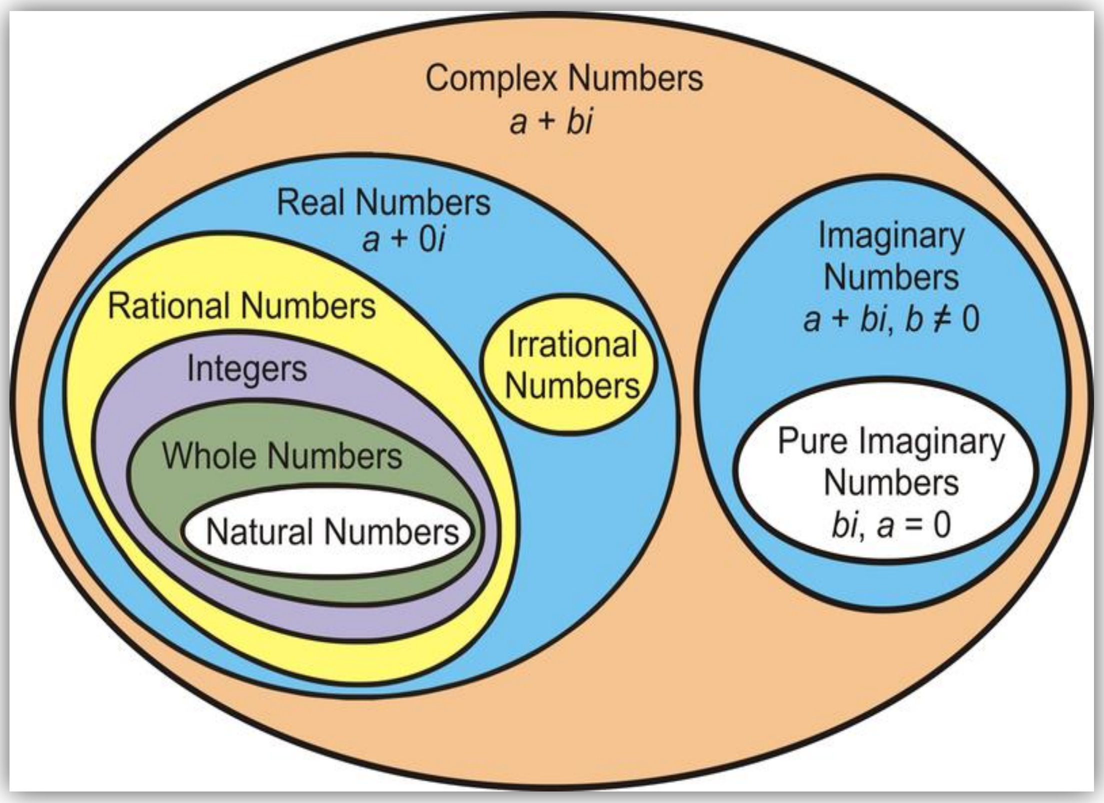
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; , \; a \neq 0$$

لكن جميع أنظمة الأعداد السابقة تقف عاجزة دون حل المعادلة البسيطة التالية:

$$x^2 + 1 = 0$$

ومن هذه الحقيقة تأتي الحاجة إلي نظام أعداد جديد قادر على حل مثل هذه المعادلة، وقد أطلق على نظام الأعداد هذا نظام الأعداد المركبة وهو الأكثر صعوبة من بين كل ما تم ذكره. وهذا بسبب أن الأعداد المركبة أعداد تخيلية، ولا يستطيع البعض استيعابها، وربما تعود المشكلة في عدم استيعاب ماذا تعني الأعداد التخيلية إلى طبيعة اسمها نفسه، فالاسم يُعد حائل كبير أمام تقبل الناس لهذا النوع من الأعداد. لأنه اسم يعتبر ظاهرة بلا سبب، وله تأثير سلبي على الوجدان، وإن كانت تحمل اسماً أخر كانت الناس سوف تستوعب ماذا يعني الرقم التخيلي. وقد أثبتت الإحصائيات الحديثة أن هناك نسبة لا تقل عن خمسة وثمانون في المائة من الناس لا يتقبلون هذا المسمى بسبب الاسم التخيلي له.

وإذا نظرنا إلى الزمن البعيد وخاصةً عند الإغريق نجدهم قد أطلقوا عليها اسم " أعداد غير عقلانية " ثم تطور الاسم بعد ذلك ليصبح " الأعداد المركبة ". وهو اسم تم إطلاقه حتى لا يرفض فكرته الناس ويتقبله على أنه أعداد يمكن تركيبها بجانب بعضها البعض لنحصل في النهاية على نتيجة. ومن هذا المنطلق وجب التعرف على هذه الاعداد.



شكل (1.1) أنظمة الاعداد

(2.1) مقدمة تاريخية للأعداد المركبة

Historical Review of Complex Numbers

بسبب نمو وتعقيد الحياة الانسانية مع تطور الحضارة فقد احتاج الانسان في كل مرحلة إلي نظام أعداد يلبي متطلباته الحياتية. لقد شهد تطور العدد المركب لعدة مراحل يمكن تلخيصها في النقاط التالية:

- في عام 1545، نشر جيرولاماكاردامو Girolama Cardano كتابة " الفن العظيم " مع حل المعادلة $Z^3 + a_2Z^2 + a_1Z + a_0 = 0$.

- في عام 1572 ، اظهر رافائيل بومبيلي Rafael Bombeli في كتابــه "الـجبر" أن الارقــام السالبة لها فائدة كبيرة .
- فـي عـام 1732، قـدم ليونـهـارد أويـلــر Leonhard Euler صـيـغـتـه لحل $x^n +1= 0$ والتي $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ وهو أول من استخدم الرمز $i = \sqrt{-1}$.
- فـي عـام 1831، كـارل فريدريك غاوس Carl Friedric Gauss انتج تمثيل هندسي واضح لـ x+iy .

(3.1) أهمية الاعداد المركبة في حياتنا

Importance of Complex Numbers in our Life

بـرغــم تعقيد الأعـداد الـمركبـة إلا أنهـا تستخــدم في مجـالات شتــى فـي الواقع، وهي تتمثل في:

- نستخدم الكهرباء من خلال الأعداد المركبة، وهي هامة جداً في علم الميكانيكا والفيزياء، وكل علم من خلاله يتم اختراع شيء يفيد الناس.
- الأعداد المركبة لها قدرة على الوصول إلى النتيجة النهائية بشكل صحيح لعالم الرياضة والفيزياء والميكانيكا والديناميكا فمثلًا: إذا كنت تكتب بحث عن الأعداد المركبة وتريد تقريبه للطالب بطريقة سهله فيمكنك ضرب مثال من الواقع، والذي يتمثل في قولك: "إذا كنت في متحف الشمع ورأيت تمثال لشخص ذو أعمال جليلة ودققت النظر فيه ستجده مثل الشخص الحقيقي.لكن الإنسان لم يصنع من الشمع بل الشمع كان طريقة لتجسيد الإنسان على شكل تمثال، فهو نفس الحال في الأعداد المركبة بالنسبة لأي علم تدخل فيه، فلا يستطيع الوصول إلى أفضل النتائج دون استخدام هذه الأعداد.

(4.1) التعريف بالأعداد المركبة – Definition of Complex Numbers

تعريف (1.1)

العدد المركب هو أي عدد على الصورة $z = x + iy$ حيث أن x و y هما عددان حقيقيان و i هو عدد تخيلي مربعه = -1 أي أن $i^2 = -1$ ويسمى وحدة تخيلية.

ونرمز الي مجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ وتعرف كــالتالي:

$$\mathbb{C} = \{z : z = x + iy : x , y \in \mathbb{R} , i^2 = -1\}$$

يسمي العدد الحقيقي x بالجزء الحقيقي و العدد الحقيقي y بالجزء التخيلي. وعندما يكون y (أي الجزء التخيلي) = 0، فإن قيمة العدد المركب تساوي قيمة الجزء الحقيقي x فقط و يسمي العدد عددًا حقيقيًا صرفًا (Purely real) وعندما يكون x (أي الجزء الحقيقي) = 0، كان العدد تخيليًا صرفًا (Purely imaginary).

يكتب العدد المركب z على هيئة أزواج مرتبة (x , y) حيث x , y أعداد حقيقية، أي ان العدد المركب z يكتب $z = x + iy$ أو $z = (x , y)$ وهذا يعني أن $z = x + iy = (x , y)$.

العدد التخيلي i له نفس سلوك العمليات الجبرية العادية

فمثلاً:

$5i + 4i = 9i$

$12i - 4i = 8i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^3 i^4 = i^7$

ملاحظة (1.1)

1) إذا كان $z = x + iy$ فإن x تسمى بالجزء الحقيقي (Real part) للعدد المركب z بينما y تسمى بالجزء التخيّلي (Imaginary part) ويرمز لهما كما يلي:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z$$

2) مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة حيث أن كل عدد حقيقي هو عدد مركب جزئه التخيلي صفر والعكس غير صحيح.

مما سبق الأعداد المركبة هي الأعداد التي تتكوّن من كل من الأعداد الحقيقية (Real Numbers)، والأعداد التخيلية (Imaginary Numbers)، أما الأعداد التخيلية فهي تلك التي تُعطي نتيجة سالبة عند تربيعها، وهي بذلك تختلف عن الأعداد الحقيقية التي يساوي مربع أي عدد فيها قيمة موجبة، فتربيع أي عدد حقيقي موجب يُعطي نتيجة موجبة، كما أنّ تربيع أي عدد حقيقي سالب يُعطي نتيجة موجبة أيضاً.

تعريف (2.1)

أي عددين مركبين $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ يكونان متساويان إذا وفقط إذا كان

$x_1 = x_2 , y_1 = y_2$

فعلى سبيل المثال

1) $z_1 = (2,7)$ ، $z_2 = (2,7)$ متساوان .

2) $z_1 = (3,8)$ ، $z_2 = (8,3)$ غير متساوان .

(5.1) العمليات الأساسية للأعداد المركبة

Basic Operations of Complex Numbers

للقيام بالعمليات على الأعداد المركبة يمكن ان نتبع نفس الاسلوب كما في جبر الأعداد الحقيقية، الاختلاف أنه في الأعداد المركبة إحلال (i^2) بـــ (-1) حيثما تظهر.

فإذا كانت z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$ وأن x_1 , x_2, y_1 , y_2 تكون أعداد حقيقية فــإن

- الجمع

$$z_1 + z_2 = (x_1+iy_1) + (x_2+iy_2) = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$

- الطرح

$$z_1 - z_2 = (x_1+iy_1) - (x_2+iy_2) = (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$$

- الضرب

$$z_1z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2+x_2 y_1)$$

- القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}$$

مثال (1.1)

إذا كان $z_1 = 3+2i$ و $z_2 = 1 - i$ فأوجد

1) z_1+z_2 **2)** z_1-z_2 **3)** z_1z_2 **4)** $\frac{z_1}{z_2}$

الحل:

1) $z_1+z_2 = (3+2i) + (1-i) = 4 + i$

2) $z_1-z_2 = (3+2i) - (1-i) = 2 + 3i$

3) $z_1z_2 = (3+2i)(1-i) = 3-3i+2i+2$

$= 5 - i$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i-2}{1+i-i+1}$

$= \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5i}{2}$

(1.5.1) الخواص الأساسية للعدد المركب

Basic Properties of a Complex Number

إذا كانت z_1 , z_2 , z_3 أعداد مركبة فإن عمليتي الجمع والضرب علي الاعداد المركبة تحقق التالي:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (خاصية الابدال للجمع)

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (خاصية التنسيق للجمع)

3) $z_1 + 0 = z_1$ (المحايد الجمعي)

4) $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$ (خاصية الابدال للضرب)

5) $z_1 .(z_2 . z_3) =(z_1 . z_2) . z_3$ (خاصية التنسيق للضرب)

6) $z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (خاصية التوزيع)

7) $1 . z_1 = z_1$ (المحايد الضربي)

8) If $z_1 z_2 = 0$ then $z_1 = 0$ or $z_2 = 0$

9) If $z \neq 0$ & $z . z_1 = z . z_2$ then $z_1 = z_2$

10) If $z_1 \neq 0$ & $z_2 \neq 0$ then $\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1z_2}$

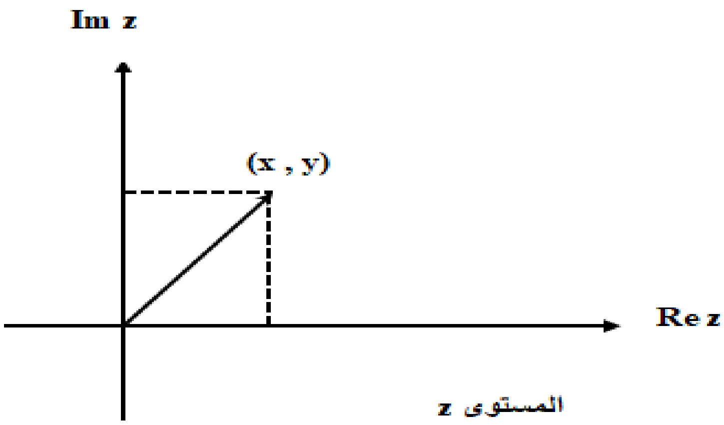
(6.1) التمثيل البياني للعدد المركب

Graphical Representation of Complex Number

العدد المركب $z = x + iy = (x , y)$ يمكن تمثيله في نظـام الاحداثيـات الكارتيزية (المستوي X Y) بطريقتين همـــا:

- يتم ترتيب الاعداد المركبة أزواجاً من الاعداد الحقيقية، بحيث يمكن تمثيلها بنقاط في المستوى.
- يمكن تمثيل العدد المركب بواسطة متجه موضع في المستوي XY الذي يكون ذيله في نقطة الأصل ويكون رأسه عند النقطة (x , y).

ويسمي بالمستوي المركب (المستوي z) ، وإن المحور X يسمي بالمحور الحقيقي والمحور Y يسمي بالمحور التخيّلي.



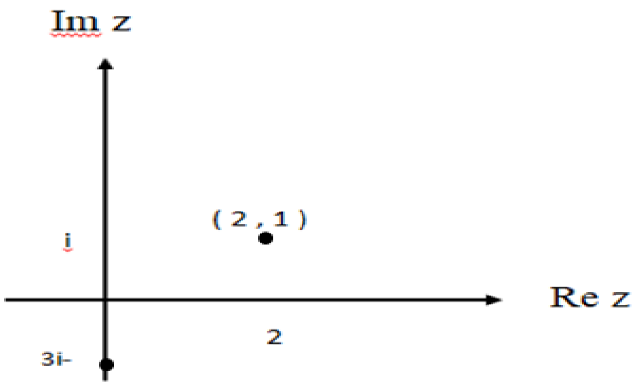
شكل (2.1) التمثيل البياني للعدد المركب

مثال (2.1)

مثل بيانياً العددين 2+i وكذلك 3i–

الحل:

العدد المركب 2+i يمكن تمثيله بالنقطة (2,1) والعدد 3i– يمكن تمثيله (3– ,0) . كما موضح بالشكل (3.1)

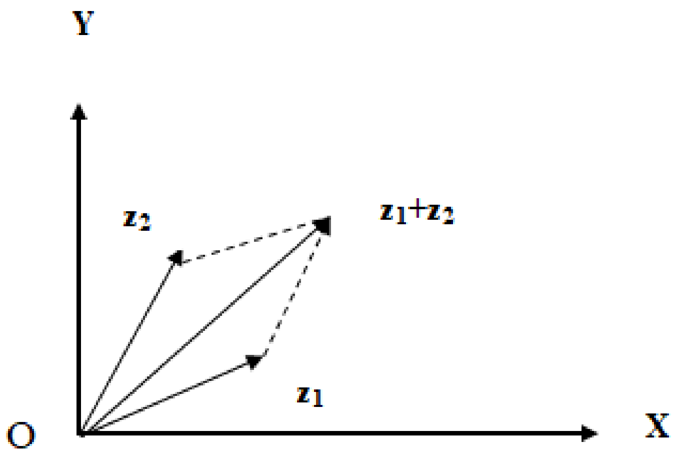


شكل (3.1) عينة لمثال لتمثيل العدد المركب

(1.6.1) جمع وطرح عددين مركبين بيانياً

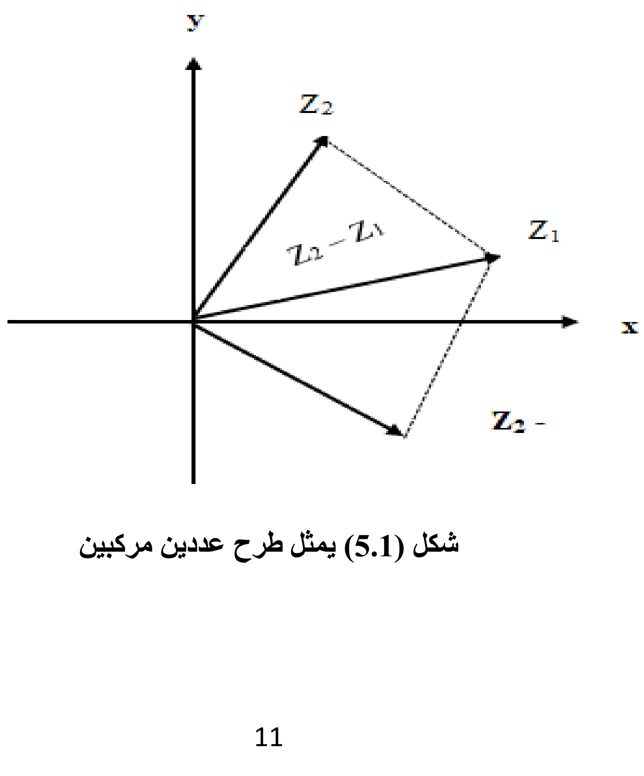
الاعداد المركبة تمثلها متجهات في المستوى المركب فكل نقطة في المستوى z ترتبط بمتجه OZ وبـما ان متجهين متوازيين لهما نفس الطول يكونا متساويين.

- أي عددين مركبين z_2, z_1 يمكن جمعهما $(z_1 + z_2)$ بيانياً طبقا لقاعدة متوازي الاضلاع كما هو موضح بالشكل (4.1) .



شكل (4.1) يمثل قاعدة متوازي الاضلاع لجمع عددين مركبين

- لتمثيل الفرق بين العددين المركبين z_2 , z_1 بيانياً نستخدم نفس الاسلوب بتطبيق قاعدة متوازي الاضلاع وهذا يعني إن المتجه $z_1 - z_2$ يمكن تمثيله بالمتجه الواصل من z_1 إلى z_2 كما هو موضح بالشكل (5.1) .



شكل (5.1) يمثل طرح عددين مركبين

(7.1) مرافق العدد المركب – Conjugate of Complex Number

تعريف (3.1)

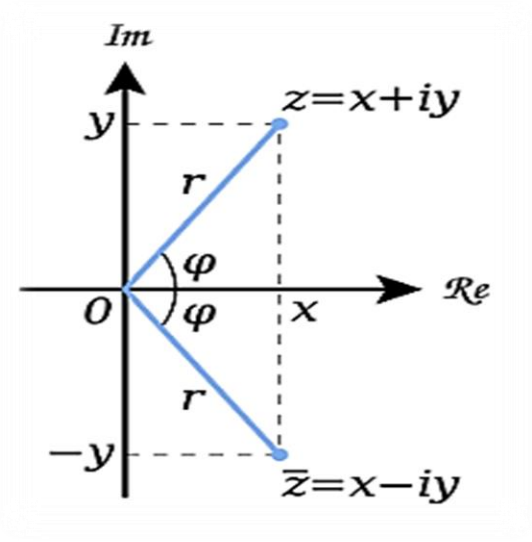
لكل عدد مركب $z = x + iy$ يوجد مرافق مركب له يرمز له بالرمز $\bar{z}$ ومعرف بالمساواة:

. $\bar{z} = x - iy$

$\bar{z}$ هو انعكاس z حول محور الاعداد الحقيقية وإذا جمعنا العدد والعدد المرافق له وقسمنا على 2 نحصل على الجزء الحقيقي للعدد z وإذا طرحنا العدد المرافق له من العدد وقسمنا على $2i$ نحصل على الجزء التخيلي للعدد z أي أن

$$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} \quad , \quad Re\,(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

والشكل التالي (6.1) يوضح مرافق العدد المركب z.



شكل (6.1) مرافق العدد المركب

مثال (3.1)

أوجد مرافق الاعداد المركبة الاتية :

1) $z = 3$

2) $z = 5i$

3) $z = 2 - 7i$

الحل:

1) $\bar{z} = 3$

2) $\bar{z} = -5i$

3) $\bar{z} = 2 + 7i$

(1.7.1) خواص مرافق العدد المركب

Properties of Complex Number Conjugate

إذا كانت z_1 , z_2 عددان مركبان فإن :

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

2) If Re z = x & Im z = 0 then z = x & $\bar{z}$ = x

3) $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x+iy = z$

4) $z + \bar{z} = 2x \longrightarrow x = \text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

5) $z - \bar{z} = 2iy \longrightarrow y = \text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

6) $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

8) $z . \bar{z} = |z|^2$

البرهان

لتكن $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$ عددين مركبين فإن :

1) a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1+x_2) - i(y_1+y_2)$

$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$

$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\therefore \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} = (x_1-x_2) - i(y_1-y_2)$

$= (x_1-iy_1) - (x_2-iy_2)$

$= \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

$\therefore \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

2) $z = x + 0i$

$z = x$

$\bar{z} = x - 0i$

$\bar{z} = x$

3) $\bar{z} = x - iy$

$\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy$

$\therefore \bar{\bar{z}} = z$

4) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = x + iy + x - iy = 2x$

$\therefore \quad z + \bar{z} = 2x \quad \longrightarrow \quad x = \text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

5) $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = x + iy - x + iy = 2iy$

$\therefore \quad z - \bar{z} = 2iy \quad \longrightarrow \quad y = \text{Im } z = \frac{z + \bar{z}}{2i}$

6) $\overline{z_1 \, . \, z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + \imath (x_1 y_2 + y_1 x_2)}$

$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i (x_1 y_2 + y_1 x_2)$

$= (x_1 - iy_1) \, . \, (x_2 - iy_2)$

$= \bar{z}_1 \, . \, \bar{z}_2$

$\therefore \overline{z_1 \, . \, z_2} = \bar{z}_1 \, . \, \bar{z}_2$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + \imath \, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}\right)\right)}$

$= \left(\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} - i \, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}\right)\right)$

$= \frac{x_1 - y_1 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\therefore \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

8) $z \, . \, \bar{z} = (x + iy) \, . \, (x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2$

$= x^2 + y^2 = |z|^2$

$\therefore z \, . \, \bar{z} = |z|^2$

مثال (4.1)

إذا كان $z_1 = 1 + 5i$ و $z_2 = 2 + 3i$ فأوجد ما يأتي

1) $\overline{z_1 \, . \, z_2}$

2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

الحل:

1) $\overline{z_1 \, . z_2} = \overline{(1 + 5\imath) . (2 + 3\imath)} = \overline{(2 - 15) + \imath\,(3 + 10)}$

$= \overline{-13 + 13\,\imath}$

$= -13 - 13i$

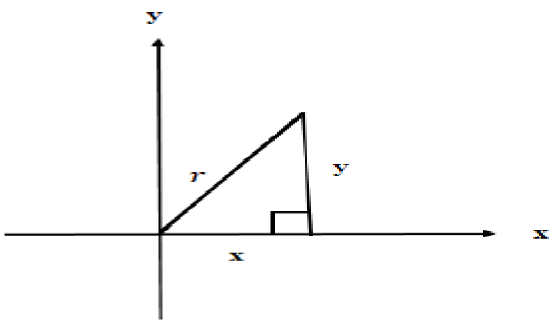
$= -(13 + 13i)$

2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{\overline{(1+5\imath)}}{\overline{(2+3\imath)}} = \left(\frac{1-5i}{2-3i}\right)\left(\frac{2+3i}{2+3i}\right) = \frac{2+3i-10i+15}{4+9} = \frac{17-7i}{13}$

(8.1) القيمة المطلقة للعدد المركب – The absolute value of a Complex Number

تعريف (4.1)

القيمة المطلقة (مقياس) للعدد المركب $z = x + iy$ يرمز لها بالرمز $|z|$ يعرف بـ $r = |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



شكل (7.1) القيمة المطلقة للعدد المركب

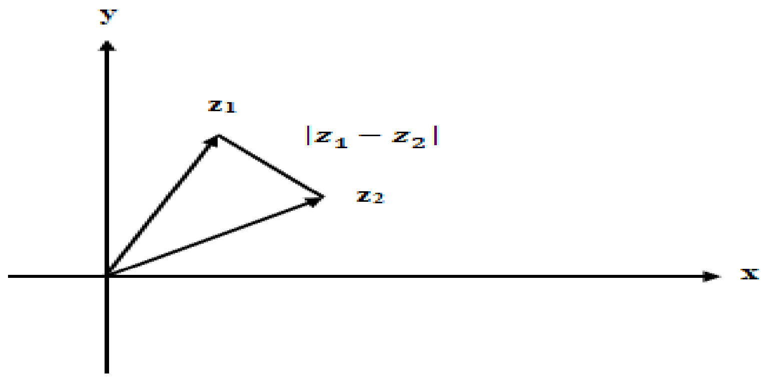
تعريف (5.1)

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ فإن المسافة بين نقطتين z_1 , z_2 هي:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)|$$

$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



شكل (8.1) المسافة بين عددين مركبين

بشكل عام فإن $|z|$ هي عبارة عن المسافة بين نقطة الاصل و العدد z بينما $|z_1 - z_2|$ هي المسافة بين z_1 , z_2 .

ملاحظة (2.1)

المعادلة $|z - z_0| = r$ تمثل معادلة دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r ، حيث z متغير مركب و z_0 عدد مركب و r عدد حقيقي .

مثال (5.1)

أثبت أن المعادلة $|z - 1 + i| = 1$ تمثل دائرة مركزها $z_0 = 1 - i$ ونصف قطرها يساوي 1

الحل:

المعادلة يمكن وضعها على الصورة:

$|x + iy - 1 + i| = 1$

$|(x - 1) + i(y + 1)| = 1$

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

أي أن المركز هو $(1 , -1)$ وهو العدد المركب $z_0 = 1 - i$.

Properties of absolute value – خواص القيمة المطلقة للعدد المركب (1.8.1)

إذا كانت $z_1 , z_2 , z_3 \ldots\ldots z_n$ اعداد مركبة فإن:

1) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

او بصورة عامة

$|z_1 . z_2 . z_3 . \ldots\ldots z_n| = |z_1| . |z_2| . |z_3| \ldots\ldots | z_n|$

2) $|z_1.z_2|^2 = |z_1|^2.|z_2|^2$

3) $|kz| = |k||z|$, $k \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

5) $| z_1 - z_2 | = | z_2 - z_1 |$

6) $| z | = | \bar{z} |$

7) $| z_1 + z_2 | \leq | z_1 | + | z_2 |$

متباينة مثلثية

8) $| z_1 - z_2 | \geq | z_1 | - | z_2 |$

9) $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$

10) $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

11) $|z|^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$

12) $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ If $z = 0$

البرهان

1) $| z_1 . z_2 |^2 = (z_1 . z_2) . \overline{(z_1 . z_2)}$

$= (z_1 . z_2) . (\bar{z}_1 . \bar{z}_2)$

$= (z_1 . \bar{z}_1) . (z_2 . \bar{z}_2)$

$= | z_1 |^2 . | z_2 |^2$

$| z_1 . z_2 |^2 = | z_1 |^2 . | z_2 |^2$

بأخذ الجدر التربيعي للطرفين نجد أن:

$| z_1 . z_2 | = | z_1 | . | z_2 |$

4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right) = \frac{z_1 . \bar{z}_1}{z_2 . \bar{z}_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد أن:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

5) $|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)|$

$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= |z_2 - z_1|$$

6) $|z| = |x + iy|$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

$$|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{(x)^2 + (-y)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

ومن (1) و(2) نجد أن الطرفين متساويان

$$\therefore |z| = |\bar{z}|$$

7) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1 . \bar{z}_1 + z_1 . \bar{z}_2 + z_2 . \bar{z}_1 + z_2 . \bar{z}_2$$

$$= z_1 . \bar{z}_1 + 2\mathrm{Re}\{z_1 . \bar{z}_2\} + z_2 . \bar{z}_2$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|\mathrm{Re}\{z_1 . \bar{z}_2\}| + |z_2|^2$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1 . \bar{z}_2| + |z_2|^2$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$\therefore |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد أن:

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

وهكذا نستطيع تعميم المتباينة المثلثية للأعداد المركبة أي أن

$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n|$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

8) $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2|$

$|z_1| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$

$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$

$|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

مثال (6.1)

أوجد مقياس كل من الاعداد المركبة الاتية .

1) $z = 5 + 12i$
2) $z = 4$
3) $z = -7i$

الحل :

1) $|z| = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

2) $|z| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16 + 0} = \sqrt{16} = 4$

3) $|z| = \sqrt{(0)^2 + (-7)^2} = \sqrt{0 + 49} = \sqrt{49} = 7$

مثال (7.1)

وضح بالرسم مجموعة النقاط التي تحقق العلاقة الاتية

$$|z + 1| < 2$$

الحل:

هذه المتباينة تمثل جميع النقاط التي تقع داخل الدائرة

$|z+1| < 2$

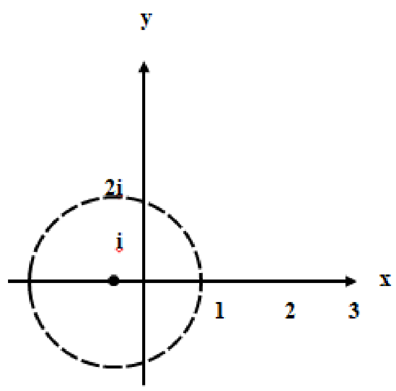
$|x+iy+1| < 2$

$|(x+1)+iy| < 2$

$\sqrt{(x+1)^2+y^2} < 2$

$(x+1)^2+y^2 < 4$

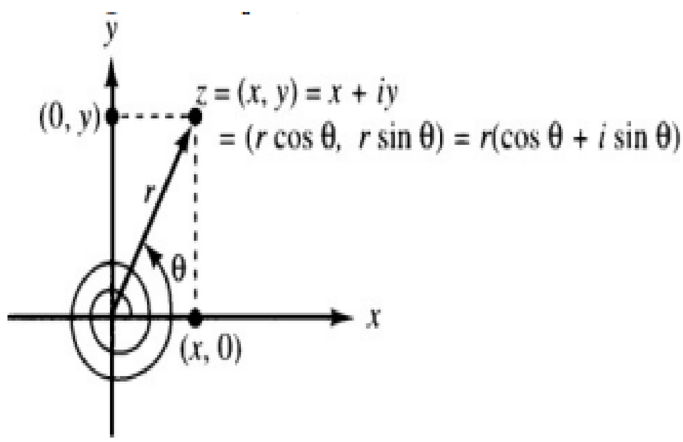
وهي دائرة مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها 2 .



(9.1) الصورة القطبية للعدد المركب

Complex Number in Polar Form

عرفنا سابقاً أن العدد المركب z يمكن تمثيله هندسياً كمتجه، وعليه يمكننا وصفه بشكل فريد من حيث الطول $|z|$ والاتجاه (الزاوية θ التي يصنعها مع المحور x الموجب) .



شكل (9.1)

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\because z = x + iy$$

$$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حيث

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

و يسمى r بمقياس العدد المركب z وتسمى θ زاوية للعدد المركب z (argument of z) ويرمز لها بالرمز $\theta = \arg z$ مع ملاحظة ان θ تعطي بالتقدير الدائري.

تسمى هذه الصيغة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالصورة القطبية للعدد المركب و r, θ يسميان بالإحداثيات القطبية.

ملاحظة (3.1)

بالصيغة القطبية نرى انه للحصول على $\bar{z}$ نستبدل الزاوية (θ) بالزاوية ($-\theta$)

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$$\bar{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$$

علماً بأن

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

ملاحظة (4.1)

إذا زادت θ بمقدار $2n\pi$ حيث n عدد صحيح فان موضع النقطة z لا يتغير. أي انه يوجد عدد لا نهائي من القيم لسعة العدد المركب بسبب كون $\sin\theta$, $\cos\theta$ دالتين دوريتين دورتهما 2π . أو بعبارة أخرى

إذا كانـت θ هـي سعة الـعدد المـركب z فان θ+2nπ حيث ... . ±2. ±1. 0 = n هي ايضا سعة نفس العدد المركب.

حالات خاصة

$$\arg(-i) = \frac{-\pi}{2} + 2n\pi \quad , \quad \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

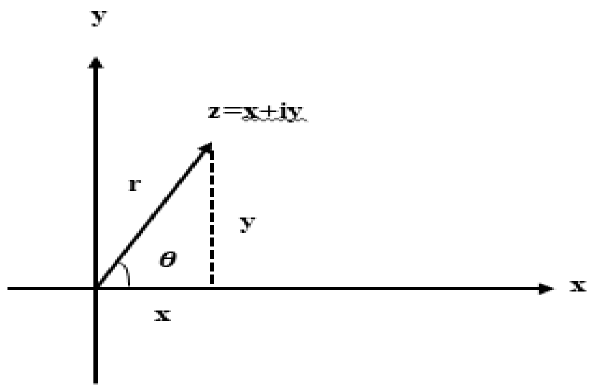
$$\arg(-1) = \pi + 2n\pi \quad , \quad \arg(1) = 0 + 2n\pi$$

ملاحظة (5.1)

إذا كانت $z = 0$ فإن θ غير معرفة لأن المعادلة $\tan\frac{y}{x}$ تصبح $\frac{0}{0}$ وهذا مقدار غير معرف، وعلى ذلك لا يمكن تمثيل $z = 0$ بالإحداثيات القطبية.

(10.1) سعة العدد المركب – Argument of the Complex Number

الزاويـة θ الـتي يصنعهـا الـمتجـه الممثل للعـدد الـمركب z مع الاتجاه الموجب للمحور الحقيقي الموجب تسمـى سعـة العدد z (Argument of z) ويرمز لها بالرمز arg z إذاً $\theta \equiv \arg z$ وبالتالي رأينا أن:



شكل (10.1) التمثيل البياني لسعة العدد المركب

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

إذاً θ لها قيـم مـتعـددة فـنلاحـظ أن $\theta \pm 2n\pi$ هــي أيضـاً arg حيـث n عـدد صحيـح موجب وذلك لان

$$\cos\theta = \cos(\theta \pm 2n\pi) \quad , \quad \sin\theta = \sin\theta \pm 2n\pi$$

$$\tan\theta = \tan(\theta \pm 2n\pi)$$

أمـا إذا كانـت $-\pi < \theta \leq \pi$ فإنـه توجـد قيـمة وحـيـدة لـسعـة تسمـى **السـعـة الرئيسية** للعدد المركب (Principal Argument) أي أن $-\pi < \text{Principal arg} \leq \pi$ وهـي اصغـر قيـمة موجبة للسعة وتكتب باختصار $\text{Principal arg} = \text{p arg z}$ ونرمز لها بالرمز $\theta = \text{Arg z}$.

مثال (8.1)

جد السعة والسعة الرئيسية للعدد المركب $z = 1 + \sqrt{3}\, i$

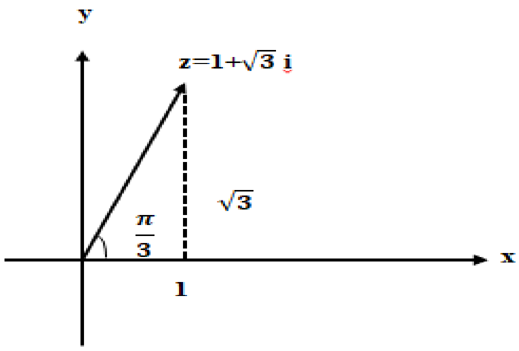
الحل:

حسب تعريف السعة نجد أن

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi\,, \quad n = 0, \pm1, \pm2 \,\ldots\ldots$$

أما السعة الرئيسية لهذا العدد فهي أصغر قيمة موجبة للسعة θ بحيث تقع بين $\pi, -\pi$ أي أن $\theta = \frac{\pi}{3}$.



شكل (11.1)

مبرهنة (1.1)

إذا كان z_1, z_2 عددين مركبين فإن السعة تحقق الاتي:

1) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

2) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

3) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$

4) $\arg(\bar{z}) = -\arg z$

مثال (9.1)

ضع العدد $\frac{1+\sqrt{3}i}{-3-3i}$ في الصورة القطبية .

الحل:

$z_1 = 1+\sqrt{3}i \quad , \quad r_1 = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3}\,)^2} = 2 \quad , \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3}$

$$z_1 = 2\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$z_2 = -3-3i \quad , \quad r_2 = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \quad , \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4}$

$$z_2 = 3\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$\frac{z1}{z2} = \frac{r1}{r2}\,[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

$\frac{z1}{z2} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\,[\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})]$

$\frac{z1}{z2} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\,[\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})]$

ملاحظة (6.1)

من الجدير بالذكر أن ننوه على أن العلاقة (1) في المبرهنة السابقة (1.1) قد لا تكون صحيحة إذا حولناها بدلالة السعة الرئيسية أي أن العلاقة :

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \quad \ldots\ldots(*)$$

مثال (10.1)

بين أن العلاقة (*) ليست بالضرورة أن تكون صحيحة.

الحل:

نفرض أن $z_1 = 3i$ و $z_2 = -2$ فإن

$$\text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{Arg } z_2 = \pi$$

وكذلك $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(-6i) = -\frac{\pi}{2}$

ولكن $\text{Arg } z + \text{Arg } z = \frac{3\pi}{2}$

وهذا يشير بأن $\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$

مثال (11.1)

ضع الاعداد المركبة الاتية في الصورة القطبية.

1) $z = 1-i$

2) $z = 3+3\sqrt{3}\, i$

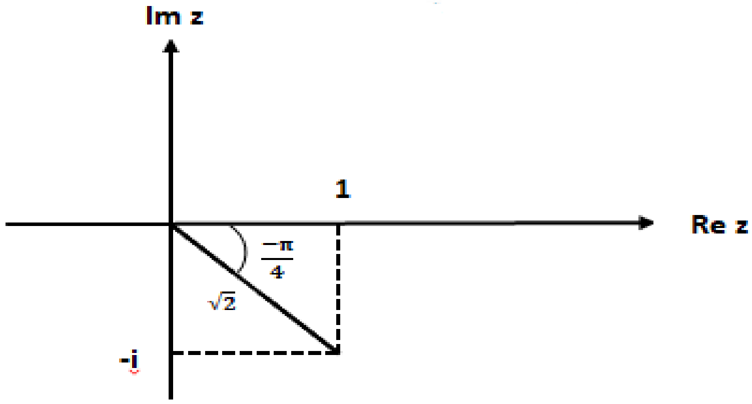
الحل :

1) $x = 1\ , y = -1\ ,\ r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = 45° = \frac{-\pi}{4}$$

$$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{-\pi}{4} + i \sin\frac{-\pi}{4})$$



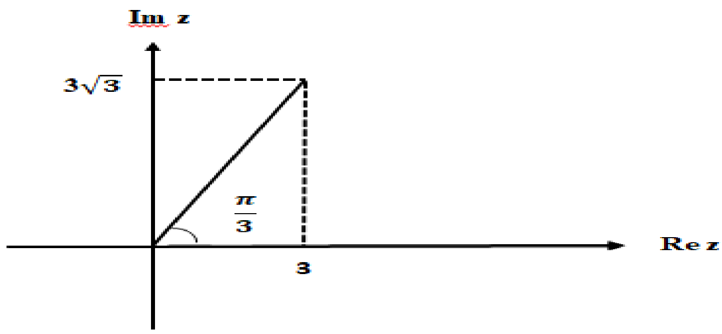
شكل (12.1)

2. $x = 3\ ,\ y = 3\sqrt{3}\ ,\ r = \sqrt{(3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$z = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})$$



شكل (13.1)

(11.1) ضرب وقسمة الاعداد المركبة في الصورة القطبية

Multiplication and Division of a Complex Numbers in Polar Form

إذا كانت

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

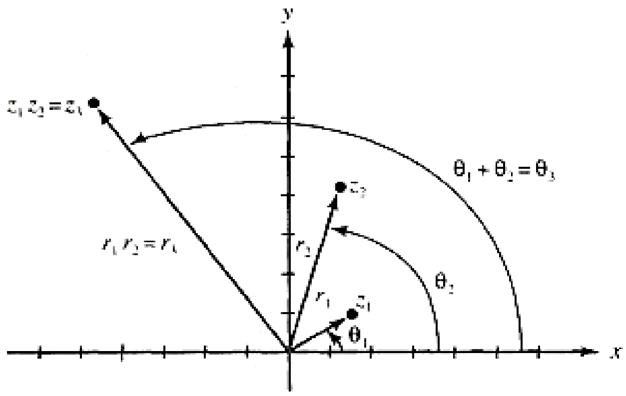
$$z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

فإن

1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - i \sin\theta_1 \sin\theta_2)$

$+ i (\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)]$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$



شكل (14.1) يمثل ضرب عددين مركبين

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}$

$$= \frac{r_1}{r_2} . [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i (\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

(12.1) صيغة اويلر – Euler Formula

لأي عدد حقيقي θ نعرف $\exp i\theta = e^{i\theta}$ بالمعادلة التالية:

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

وتعرف المعادلة بصيغة أويلر (Euler Formula) ويستدل عليها من سلاسل الجيب والجيب تمام والدالة الاسية

نعلم أن حسب متسلسلة تايلور

$$e^{x} = 1+ x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} \qquad (*)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

ومن (*) لو وضعنا $x = i\,\theta$ نحصل على

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} \cdots$$

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots\right)$$

$$\therefore \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ملاحظة (7.1)

من خلال صيغة اويلر يمكن اعطاء صيغة أخرى للعدد المركب وهي:

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,e^{i\theta}$$

علماً بأن $|z| = r$

وتسمى العبارة $z = |z|\,e^{i\theta}$ بــالصيغة الأسية للعدد المركب.

(1.12.1) خواص صيغة اويلر – Properties of Euler Formula

إذا كان $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ فإن

1) $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1 e^{i\theta_1}} = \frac{1}{r_1} e^{i\theta_1}$

2) $z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

3) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\ e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

مثال (12.1)

أكتب العدد المركب التالي على الصيغة الأسية للعدد المركب.

$$z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$$

الحل:

باستخدام الصيغة $z = |\ z\ |\ e^{i\theta}$

$z = \frac{|-1+\sqrt{3}i|}{|\sqrt{3}-i\ |}\ e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$\theta_1 = \arg\left(-1+\sqrt{3}\right)$

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\theta_2 = \arg\left(\sqrt{3} - i\ \right)$

$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-5\pi}{6}$

$\therefore z = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{\frac{9\pi}{6}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

(13.1) نظرية دي موافر – De Moivere's Theorem

نعلم فيما سبق أنه إذا كان z_1 , z_2 عددين مركبين فإن:

$z_1\ z_2 = r_1\ r_2\ [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$

إذا كانت $z = z_1 = z_2$

$$z^2 = r^2\ [\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)]$$

$$z^3 = r^3\ [\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)]$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$z^n = r^n\,[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

وهذه هي الصيغة العامة لنظرية دي موافر.

مثال (13.1)

باستخدام صيغة دي موافر أثبت أن

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

الحل:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i\,(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

وعندما نأخذ الجزء الحقيقي مع الحقيقي تحصل على النتيجة المطلوبة

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

مثال (14.1)

ضع المقدار $(\sqrt{3} + i)^{14}$ في صوره $x + iy$.

الحل:

$$r = \sqrt{4} = 2 \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$z^{14} = \left[\,2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{14}$$

$= 2^{14} (\cos\frac{\pi}{6} \times 14 + i \sin\frac{\pi}{6} \times 14)$

$= 2^{14} (\cos\frac{7\pi}{3} + i \sin\frac{7\pi}{3})]$

$= 2^{14} [\cos (\frac{\pi}{3} + 2\pi) + i \sin (\frac{\pi}{3} + 2\pi)]$

$= 2^{14} . \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i)$

$= 2^{13} (1 + \sqrt{3}i)$

(14.1) جدور الأعداد المركبة – Root of Complex Numbers

من أهم فوائد الشكل القطبي وخاصة الشكل الأسي للعدد المركب هو تسهيل عملية ايجاد جذور العدد المركب.

تعريف (6.1)

يسمي أي عدد مركب z بأنه الجذر النوني للعدد المركب w إذا كان $z^n = w$ ويكتب

$$z = w^{\frac{1}{n}}$$

نفرض أن z عدد مركب، n عدد صحيح موجب فإن:

$$z^n = \left(|z|e^{i\theta}\right)^n = |z|^n e^{in\theta}$$

ومن ذلك فإن $|z^n| = |z|^n$, $\arg z^n = n\theta$

ولإيجاد الجذر النوني للعدد المركب نتبع مرحلتين الأولي إيجاد الجذر النوني للعدد1 ثم المرحلة الثانية لإيجاد الجذر النوني لأي عدد مركب.

مبرهنة (2.1)

يوجد n من الاعداد المركبة التي تحقق المعادلة:

$$z^n = 1$$

وتسمي جذور الوحدة وهي

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n} \qquad , k = 0,1, \ldots\ldots n-1$$

البرهان

باستخدام الشكل الأسي للعدد المركب نستنتج أن:

$$|z|^n e^{in\theta} = 1e^{0i}$$

ومن ذلك ينتج أن $|z|^n = 1$ أي أن $|z| = 1$

وكذلك $n\theta - 0 = 2k\pi \qquad , k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$

وهذا يعطي:

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n} \qquad , \quad k = 0,1, \ldots\ldots n-1$$

وهذه القيم المختلفة للمتغير θ ، حيث تكون القيم الاخرى تكراراً لهذه القيم وتكون هناك n جذراً للعدد المركب 1 وهي:

$$z_k = e^{i\theta_k} = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

$$= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad , k = 0,1,\ldots\ldots n-1$$

ويرمز لهذه الجذور للعدد الواحد بالرموز

$$1 , w_n , w_n^2 , \ldots\ldots w_n^{n-1}$$

حيث أن

$$w_n = e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

مبرهنة (3.1)

يوجد n جذراً يحقق المعادلة

$$z = w^{\frac{1}{n}}$$

وهي: $z_k = |w|^{\frac{1}{n}} . e^{\frac{\theta_\circ + 2k\pi}{n} i} \quad , \quad k = 0,1,2, \dots \dots n-1$

حيث أن $\theta_\circ = \arg w$

البرهان

بالمثل نستخدم الشكل الاسي للعدد المركب للعددين z ,w لنحصل علي

$$(|z|e^{i\theta})^n = |w|e^{i\theta_\circ}$$

حيث أن $\theta = \arg z \quad , \quad \theta_\circ = \arg w$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$|z|^n = |w| \quad , \quad n\theta - \theta_\circ = 2k\pi \ , k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \dots$$

وبالتالي ينتج أن:

$$|z| = |w|^{\frac{1}{n}} \ , \theta_k = \frac{\theta_\circ + 2k\pi}{n} \ , \quad k = 0 \ , 1, \dots \dots . n-1$$

وهذه هي القيم المختلفة للسعة الزاوية θ تكون تكراراً لهذه القيم فتكون الجذور المطلوبة هي:

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} \quad e^{\frac{\theta_\circ + 2k\pi}{n} i} \ , \ k = 0, 1 \ , \dots \dots n-1$$

مثال (15.1)

جذ جذور المعادلة $z^5=1$.

الحل:

جذور المعادلة $z^5=1$ هي $z = 1^{\frac{1}{5}}$ أي هي الجذور الخمسية للعدد 1 وهي:

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{5} i} \quad , k = 0 \ , 1 \ , 2 \ , 3 \ , 4$$

وهي كما يلي:

$$z_0 = e^{\,0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

مثال (16.1)

جد جذور المعادلة $w^5 = (\sqrt{3}+i)$

الحل:

الجذور المطلوبة هي الجذور الخمسية للعدد المركب $z = \sqrt{3}+i$ باستخدام النظرية (3.1)

$$z_k = r^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{\theta+2\pi k}{n}i}$$

حيث أن $n = 5 \quad , \; k = 0, 1, 2, 3, 4 \; . \quad , \theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

وبالتعويض نحصل على الجذور المطلوبة وهي:

$$z_k = 2^{\frac{1}{5}}\, e^{\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}i} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

أي أن

$$z_0 = 2^{\frac{1}{5}}\, e^{\frac{\pi}{30}i} \quad , \quad z_1 = 2^{\frac{1}{5}}\, e^{\frac{13\pi}{30}i} \quad , \quad z_2 = 2^{\frac{1}{5}}\, e^{\frac{25\pi}{30}i}$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{5}}\, e^{\frac{37\pi}{30}i} \quad , \quad z_4 = 2^{\frac{1}{5}}\, e^{\frac{49\pi}{30}i}$$

ملاحظة (8.1)

كحالة خاصة إذا كانت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

وكان $\frac{p}{q}$ عدد نسبي ليس بينهما عامل مشترك فإن:

$$z^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}}[\cos(\frac{p\theta+2\pi k}{q}) + i\sin(\frac{p\theta+2\pi k}{q})]$$

حيث $q \neq 0 \quad , \quad k = 0 , 1 , 2 , \ldots..$

مثال (17.1)

ماهي قيمة المقدار $(1 + i)^{\frac{2}{3}}$.

الحل:

بما أن $(1 + i) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

$$(1 + i)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} [\cos(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3})]$$

حيث $k = 1, 2 , \ldots\ldots$

إذاً قيمة المقدار المطلوبة هي:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$$

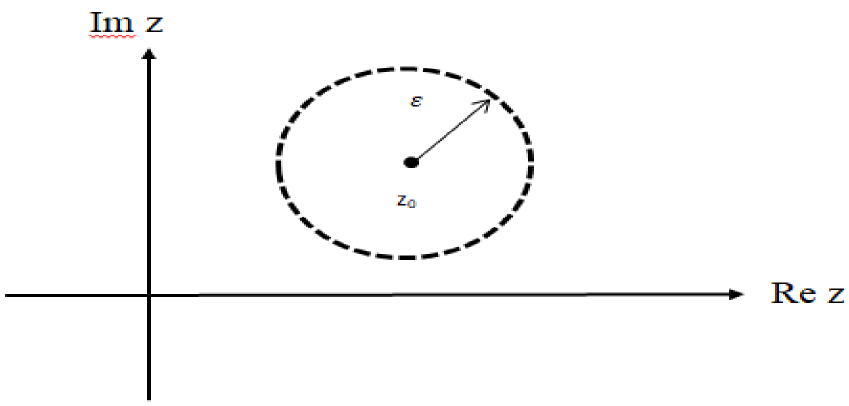
$$z_2 = 2^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

(15.1) المناطق في المستوى المركب - Regions in the Complex Plane

سنعرف بعض التعاريف الاساسية في هذا البند كالتالي:

تعريف (1.15.1)

يعرف **الجوار ε - neighborhood** للنقطة z_0 هو مجموعة كل النقاط z بحيث $|z - z_0| < \varepsilon$ و ε تكون أي عدد موجب، أي مجموعة النقط التي تقع داخل (وليس على محيط الدائرة) مركزها z_0 ونصف قطرها ε .



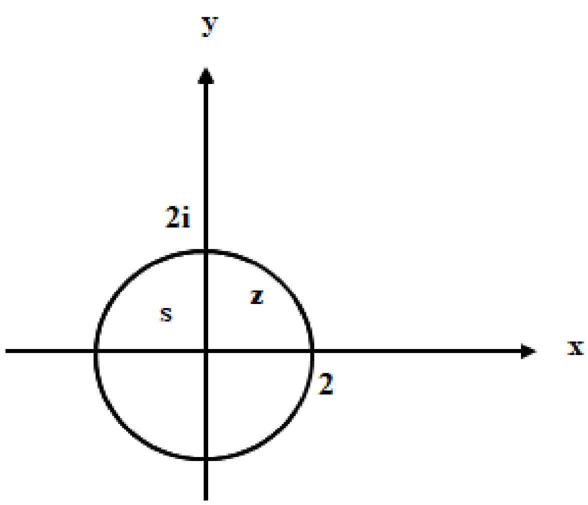
شكل (15.1)

تعريف (2.15.1)

نفرض أن S مجموعة النقاط في المستوى المركب $\mathbb{C}$، تسمي النقطة z_0 **نقطة داخلية (interior point)** من S إذا وجد جوار ε إلى z_0 يكون بكامله داخل S، مجموعـة الـنقاط الـداخلية إلي S ويرمز لها بالرمـز Int (S) .

فمثلاً

إذا كانت $z = 1+i$ فأنها تكون نقطة داخلية للمجموعة S حيث $S = \{ z : |z| = 2 \}$.



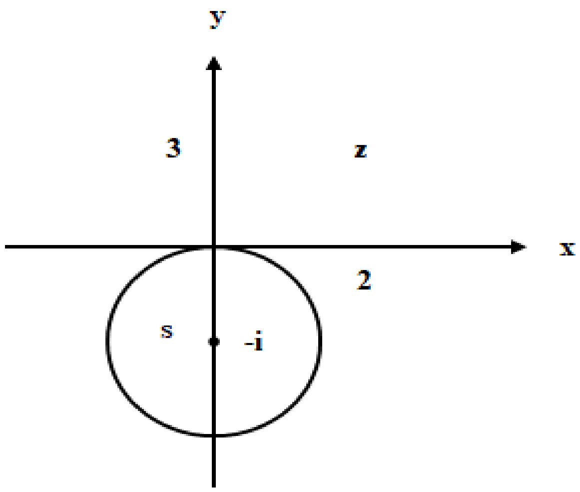
شكل (16.1)

تعريف (3.15.1)

يقال للنقطة z أنها **نقطة خارجية (Exterior point)** لمجموعة S إذا وجد جوار للنقط z لا يحوى أي نقطــة من نقط S ويرمز لها بالرمز Ext(S).

فمثلاً

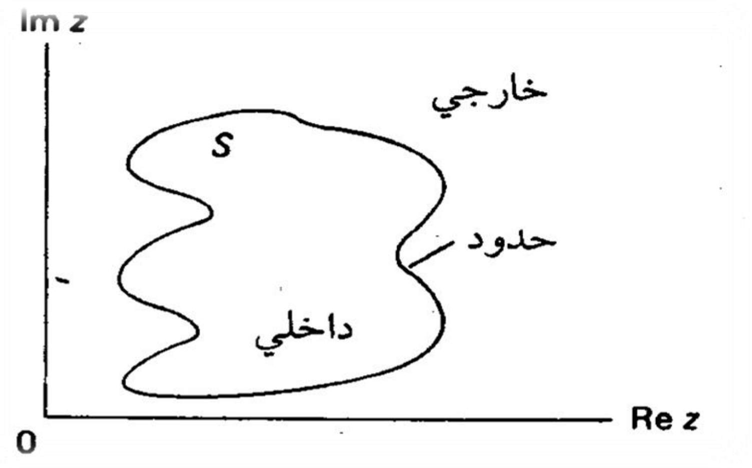
إذا كانت $z = 2+3i$ فأنها تكون نقطة خارجية للمجموعة S حيث $S = \{ z : |z + i| = 1 \}$.



شكل (17.1)

تعريف (4.15.1)

إذا لم تكن z نقطة خارجية أو نقطة داخلية للمجموعة S فإنه يقال أن z **نقطة حدية أو نقطة حدود (Boundary point)** للمجموعة S، أي أن النقطة الحدية هي تلك النقطة التي يحوى كل جوار لها نقط من S ونقط لا تنتمي للمجموعة S ويرمز لها بالرمز bd(S) .



شكل (18.1) يمثل داخلية، خارجية، حدودية النقاط

مثال (18.1)

إذا كـانـت S_0 مجموعــة الـنقـاط z حـيـث $|z| < 1$، أوجــد داخـل المجموعة S_0 وخارجها وحدودها.

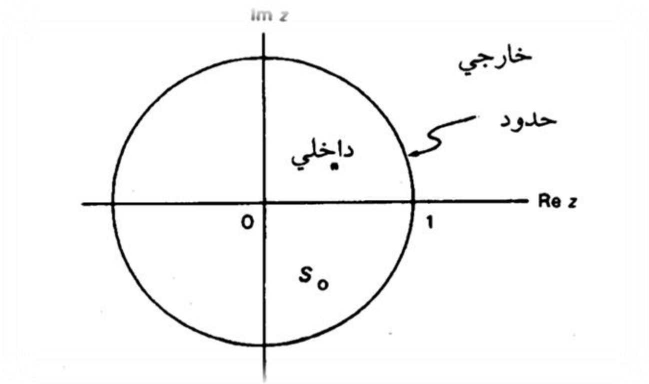
الحل:

نـفـرض أن z_0 أي نـقـطـة مــن نقاط S_0، نلاحظ أن القرص $|z - z_0| < \varepsilon$ يقع بكامله داخل S_0 عندما $\varepsilon < 1 - |z_0|$.

إذاً كـل نقطـة من S_0 نقطـة داخلـيـة ، وبالمثـل كـل نقطة z_0 تحقق $|z_0| > 1$ هي نقطة خارجية الي S_0 .

إذا كان $|z_0| = 1$ فإن كل جوار ε الي z_0 سوف يحتوى نقاطاً من S_0 ونقاطاً ليست من S_0 .

إذا حدود المجموعة S هي كل النقاط الواقعة على الدائرة $|z| = 1$ ، داخل S_0 هي المجموعة $|z_0| < 1$ أما خارج S_0 فهي مجموعة النقاط التي تحقق $|z_0| > 1$.



شكل (19.1) داخل، حدود وخارج $|z_0| < 1$

تعريف (5.15.1)

تسمي النقطة z_0 **نقطة تراكمية (Accumulation point)** لمجموعة النقط S إذا كان كل جوار ε للنقطة z_0 يحتوي نقط من S تختلف عن z_0 .

تعريف (6.15.1)

يقــال لـمجموعة مـا انـهـا **مـفـتـوحـة (Open set)** إذا كـانـت لا تـحــوى أي نقطة مــن نقاطهـا الـحديــة.

فمثلاً

$|z| < 1$ تكون مفتوحة

تعريف (7.15.1)

يقال لمجموعة ما انها **مغلقة (Closed set)** اذا كانت تحوي كل نقطة من نقاطها الحدية، المجموعة المغلقة التي تتكون من اتحاد المجموعة S ومجموعة نقاطها الحدية تسمى **الانغلاق (Closure)** المجموعة S ويرمز لها بالرمز $\bar{S}$.

فمثلاً

$|z| \leq 1$ هي مغلقة (غلاقة) كل من الفئتين $|z| < 1$ ، $|z| \leq 1$

تعريف (8.15.1)

يقال لمجموعة S انها **محدودة (Bounded)** إذا كانت كل نقطة من نقط S تقع داخل دائرة ما $|z| = R$ ، وإذا لم تكن المجموعة كذلك فإنه يقال لها **مجموعة غير محدودة (Unbounded)** .

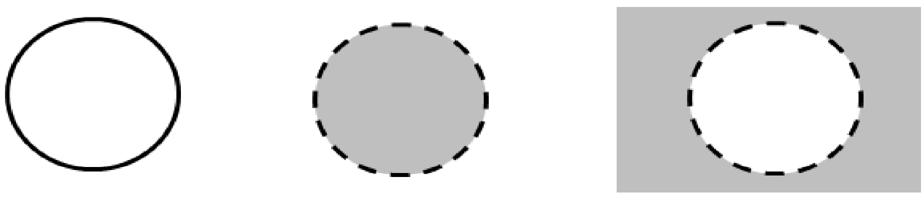
ملاحظة (10.1)

بشكل عام:

$|z - z_0| = r$ تمثل جميع النقاط التي تقع على محيط الدائرة.

$|z - z_0| < r$ تمثل جميع النقاط التي تقع داخل الدائرة (لا تشمل النقاط على المحيط).

$|z - z_0| > r$ تمثل جميع النقاط التي تقع خارج الدائرة (لا تشمل النقاط على المحيط).



$|z - z_0| = r$ $\qquad$ $|z - z_0| < r$ $\qquad$ $|z - z_0| > r$

شكل (20.1)

تعريف (9.15.1)

يقال لمجموعة مفتوحة S انها **مترابطة (Connected)** إذا كان بالإمكان ان نصل أي نقطتين من نقاطها بمسار مضلعي (Polygonal path) يتكون من عدد محدود من القطع المستقيمة المتصلة نهاية بنهاية ويقع بأكمله في الفئة S .

مثال (19.1)

ارسم وحدد المجموعات الاتية :

1) $\mathrm{Re}\, z > 0$

2) $\mathrm{Im}\, z \leq 1$

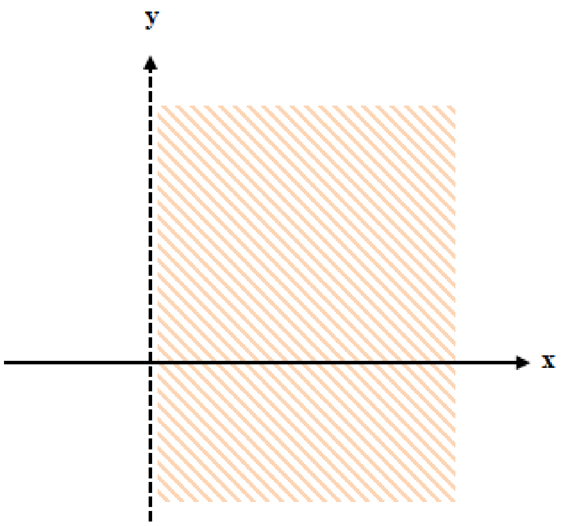
3) $|z| < 3$

4) $|z-1| \geq 3$

5) $|\mathrm{Re}\, z| \leq 2$

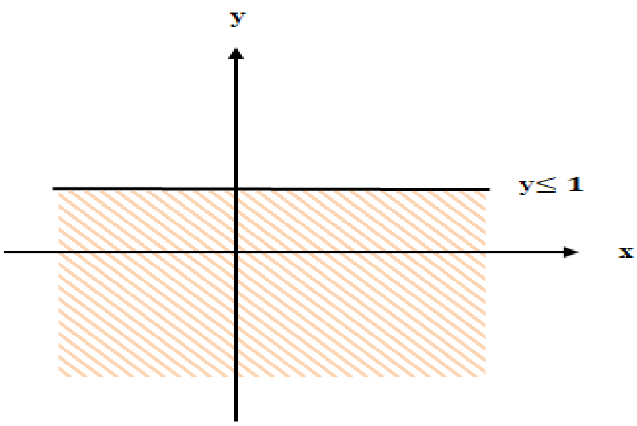
الحل:

1) $\mathrm{Re}\, z > 0$



شكل (21.1)

2) $\mathrm{Im}\, z \leq 1$



شكل (22.1)

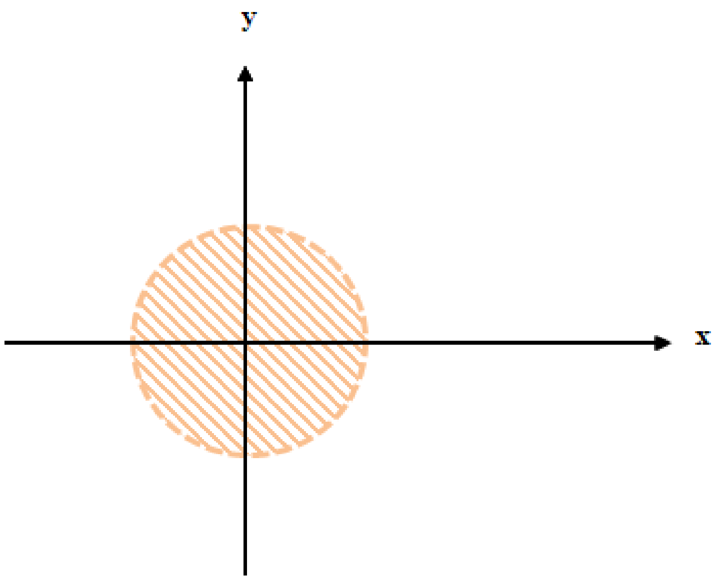
3) $|z| < 3$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sqrt{x^2 + y^2} < 3$

$x^2 + y^2 < 9$

وهي دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 3



شكل (23.1)

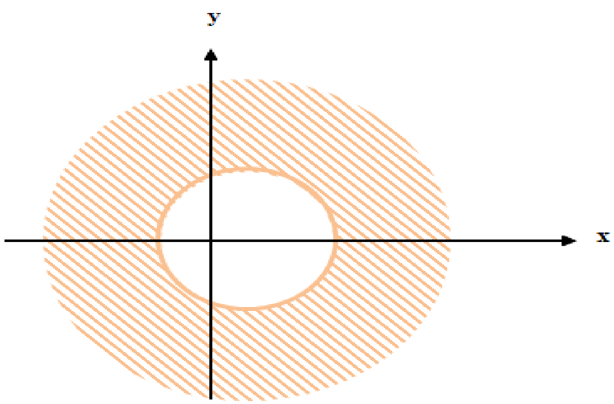
4) $|z - 1| \geq 3$

$|x - 1 + iy| \geq 3$

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq 3$

$(x-1)^2 + y^2 \geq 9$

وهي دائرة مركزها$(0,1)$ ونصف قطرها 3

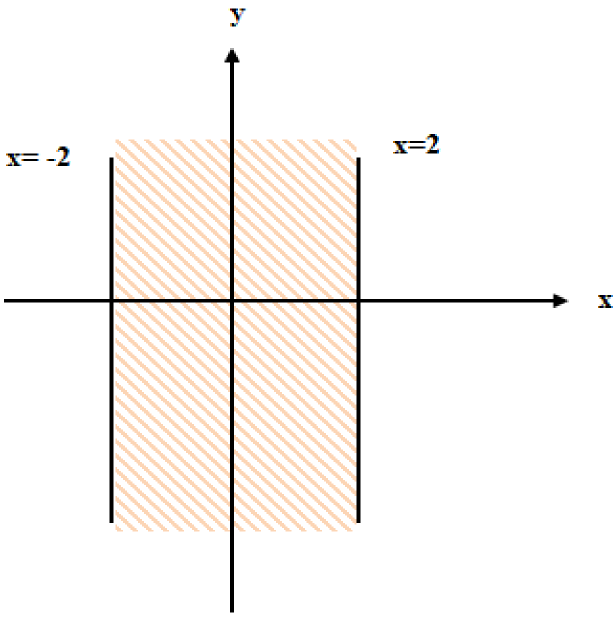


شكل (24.1)

5) $|\text{Re } z| \leq 2$

$|x| \leq 2$

$-2 \leq x \leq 2$



شكل (25.1)

الفصل الثاني

الدوال ذات المتغير المركب

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE

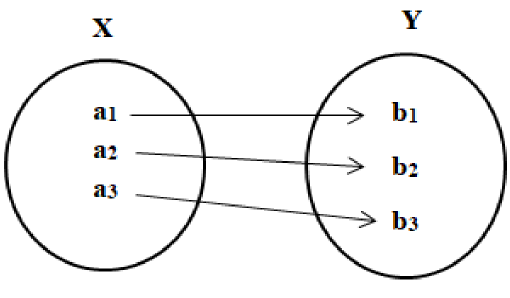
إن مفهوم الـدالة هو من المفاهيم الاساسية، والتي تلعب دوراً اساسياً في تطوير علم الرياضيات حيث أن الدالة هي أداءه هامـة فـي كتابـة الـظاهرة على شكل معادلة رياضية والتي بدراستها تعطي تفسيراً علمياً لهذه الظاهرة. سوف ندرس في هذا الفصل مـفهوم الدالة المركبة وانواعها، وكذلك بعض الدوال الأولية وخواصها مع وضـع بعـض الأمثلة المتعلقة بهذا الفصل.

(1.2) الــدوال ذات المتغير المركب – Functions of Complex Variable

يمكن كتابة الدالة ذات المتغير المركب بطريقتين: الاولي الشكل الكارتيزي، والثانية الشكل القطبي سنوضحها فيما يلي

أولاً: الشكل الكارتيزي

تعريف الدالة ذات المتغير المركب بشكل تقليدي ينطبق على تعريف الدالة ذات المتغير الحقيقي إلا أنه تم استبدال المتغير المستقل x بالمتغير z والمتغير التابع y بالمتغير w وبالتالي تعريف $y = f(x)$ يمكن أن يستخدم لتعريف الدالة المركبة والتي يرمز لها بالرمز $w = f(z)$ حيث أن الدالة في الأعداد الحقيقية تعرف على أنها علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y بحيث كل عنصر a ينتمى x يرتبط بعنصر وحيد b ينتمى Y.



تعريف (1.2)

الـدوال المركبة ذات المتغير المركب Functions of Complex Variable تعرف بقاعدة تعطي لكل عـدد مـركـب z مـن الـمجموعـة D (مجال الـــدالـة f) عـدداً وحيــداً w وتـكتـب $w = f(z)$

نقول أن w قيمة الدالة f عند النقطة z من مجال التعريف D.

لنحلل الدالة المركبة $w = f(z)$ ذات المتغير المركب $z = x+iy$ إلى جزئيها الحقيقي والتخيلي علي الشكل:

$$w = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

لـنلاحظ أن هـــذه الدالة تحتوي على زوج من الدوال الحقيقية $u(x,y)$, $v(x,y)$ في متغيرين حقيقين x , y .

مثال (1.2)

ضع الدوال الاتية على صوره $u + iv$.

1) $f(z) = z^3$

2) $f(z) = e^{-2z}$

3) $f(z) = z^2$

الحل:

1) $f(z) = z^3$

$$= (x + iy)^3$$

$$= (x^3 – 3xy^2) + (3x^2y – y^3) i$$

$$\therefore\ u(x,y) = x^3 – 3xy^2$$

$$v(x,y) = 3x^2y – y^3$$

2) $f(z) = e^{-2z}$

$$= e^{-2(x+iy)} = e^{-2x-2y} = e^{-2x} . e^{-2y}$$

$$\because e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{-2z} = e^{-2x} (\cos(-2y) + i \sin (-2y))$$

$$= e^{-2x} (\cos(2y) – i \sin (2y))$$

$$= e^{-2x} \cos(2y) – e^{-2x} i \sin (2y)$$

$$\therefore\ u(x,y) = e^{-2x} \cos(2y)$$

$$v(x,y) = e^{-2x} \sin (2y)$$

3) $f(z) = z^2$

$= (x + iy)^2$

$= x^2 + 2xyi - y^2$

$$\therefore\ u(x,y) = x^2 - y^2$$
$$v(x,y) = 2xy$$

ثانياً: الشكل القطبي

يمكن كتابة الدالة ذات المتغير المركب علي الشكل القطبي، بما أن العدد المركب z في الصورة القطبية هو $z = r\,e^{i\theta}$ فإن

$$w = f(z) = r\,e^{i\theta} = u(r , \theta) + iv (r , \theta)$$

حيث

$$r = |w| = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{v}{u}$$

مثال (2.2)

اكتب الدوال الأتية على الصورة القطبية.

1) $f(z) = |z|$

2) $f(z) = z^2$

الحل:

1) let $z = r\,e^{i\theta}$

$f(z) = \left|r\,e^{i\theta}\right|$

$= |r|\left|e^{i\theta}\right|$

$= r\,|\cos\theta + i\sin\theta|$

$= r\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$= r$

$$\therefore u(r,\theta) = r$$
$$v(r,\theta) = 0$$

2) $z = r\,e^{i\theta}$

$f(z) = f(r\, e^{i\theta})$

$= (r\, e^{i\theta})^{2}$

$= r^2\, e^{2i\theta}$

$= r^2\, [\cos 2\theta + i \sin 2\theta]$

$= r^2 \cos 2\theta + i\, r^2 \sin 2\theta$

$$\therefore u(r\,,\theta) = r^2 \cos 2\theta$$
$$v(r\,,\theta) = r^2 \sin 2\theta$$

ملاحظة (1.2)

القيم التي يمكن أن يأخذها العدد z تعرف بمجال الدالة (Domain) ويرمز له بالرمز D أي أن

$$D = \{z : f(z) \text{ defined } \}$$

والقيم التي يمكن أن يأخذها العدد w بمدى الدالة (Ring) ويرمز له بالرمز R أي أن

$$R = \{w = f(z) : z \in D\}$$

مثال (3.2)

حدد مجال الدوال التالية

1) $w = f(z) = 2z^2+4z+1$

2) $w = f(z) = |z-4|$

3) $w = f(z) = \frac{1}{z^2+4}$

الحل:

1) $D = \{ z : z \in \mathbb{C} \}$

2) $D = \{ z : z \in \mathbb{C} \}$

3) $D = \{ z : z \in \mathbb{C} \setminus \pm 2i \}$

مثال (4.2)

إذا كانت $f(z) = x^2 - 2y^2 i$ أكتب هذه الدالة بدلالة المتغير z .

الحل:

نعلم أن $x = \text{Re } z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$y = \text{Im } z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

بالتعويض ف المعادلة نجد أن:

$$f(z) = (\text{Re } z)^2 - 2(\text{Im } z)^2 i$$

$$= \frac{(z+\bar{z})^2}{4} + \frac{(z-\bar{z})^2}{2} i$$

$$= \frac{1}{4}(z^2 + 2 z \bar{z} + \bar{z}^2) + \frac{1}{2} i (z^2 - 2 z \bar{z} + \bar{z}^2)$$

$$= (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i) z^2 + (\frac{1}{2} - i) z \bar{z} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i) \bar{z}^2$$

$$= a z^2 + b z \bar{z} + c \bar{z}^2$$

$$\therefore \ a = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i) \quad , \ b = (\frac{1}{2} - i) \quad , \quad c = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i)$$

(2.2) الدالة الأحادية – One to One Function

الدالة المعرفة $w = f(z)$ من المجموعة D الي المجموعة $\grave{D}$ على الشكل:

$$F : D \longrightarrow \grave{D}$$

تسمي احادية إذا كان لكل $z_1 , z_2 \in D$ فإن:

$$f(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2$$

(3.2) الدالة الفوقية – Onto Function

الدالة المعرفة $w = f(z)$ من المجموعة D الي المجموعة $\grave{D}$ على الشكل:

$$F : D \longrightarrow \grave{D}$$

تسمي دالة فوقية إذا كانت:

$$\forall\, d_1 \in \acute{D}\ \exists d_2 \in D \ni f(d_2) = d_1$$

مثال (5.2)

حدد فيما إذا كانت الدالة $w = 3z$ أحادية و فوقية أم لا.

الحل:

بوضع $z = x + iy$ نحصل على:

$$w = u+iv = 3x + i\,(3y)$$

عندئذ: $u = 3x \quad , \quad v = 3y$

لنفرض أن لصورتي العددين z_1 , z_2 نفس القيمة w:

$3z_1 = 3z_2$

بالاختصار نحصل على

$z_1 = z_2$

∴ الدالة أحادية

$w = f(z) = 3z$

$y = 3z \qquad \therefore\ z = \frac{y}{3}$

نعوض عن قيمة z في الدالة $f(z) = y$

$f(z) = 3z$

$f(\frac{y}{3}) = 3 \cdot \frac{y}{3} = y$

∴ الدالة فوقية

(4.2) أنواع الدوال – Types of Functions

وفقاً لنوع مجال الدالة ومداها تم تصنيف الدوال بشكل عام إلى الأنواع التالية:

(1.4.2) الدالة المركبة وحيدة القيمة – Single Valued Complex Function

وهي دالـــــــــة تعيين قيمة واحدة لـ z لقيمة واحدة فقط من $w = f(z)$

فعلي سبيل المثال

$$w = f(z) = z^2 + 3z$$

(2.4.2) الدالة المركبة متعددة القيم – Multiple Valued Complex Function

1) دالة متعدد الي واحد

وهي دالة تقوم بتعيين عدة قيم من z إلى w.

فمثلا

$$w = f(z) = |z| \qquad , w = f(z) = z^2$$

2) دالة واحد الي متعدد

وهي دالة تقوم بتعيين قيمة واحدة لـ z إلى عدة قيم لــ w .

فمثلاً

$$w = f(z) = \sqrt{z}$$

(3.4.2) الدوال العكسية – Inverse Functions

إذا كانت $w = f(z)$ فأنه يمكن اعتبار z كدالة في المتغير w وتكتب $w = f^{-1}(z)$ ويقال أن f^{-1} هي الدالة العكسية المناظرة للدالة f .

ولإيجاد الدالة العكسية نقوم بالخطوات التالية :

- إثبات أن الدالة $f(z)$ دالة احادية (one to one) .
- نكتب الدالة على الصورة $w = f(z)$.
- نكتب z بدلالة w
- نكتب $w = f^{-1}(z)$ بدلالة w ثم نبدل w بـ z .

مثال (6.2)

أوجد الدالة العكسية $w = f(z) = \frac{z-1}{z-2}$

الحل:

أولاً نثبت أن الدالة أحادية

نفرض أن لصورتي العددين z_1 , z_2 نفس القيمة w

$$\frac{z_1-1}{z_1-2} = \frac{z_2-1}{z_2-2}$$

بضرب الطرفين والوسطين نحصل على

$(z_1 - 1)(z_2 - 2) = (z_2 - 1)(z_1 - 2)$

$z_1 z_2 - 2z_1 - z_2 + 2 = z_1 z_2 - 2z_2 - z_1 + 2$

بالاختصار نحصل على $z_1 = z_2$

$\therefore$ احادية دالة

$w = \frac{z-1}{z-2}$

$zw - 2w = z - 1$

$zw - z = 2w - 1$

$z = \frac{2w-1}{w-1}$

$h(z) = f^{-1}(z) = \frac{2z-1}{z-1}$

(4.4.2) الدالة المركبة (تركيب الدوال) – Composite Function

إذا كان $f(z)$, $g(z)$ دالتان فإن $g[f(z)]$, $f[g(z)]$ هي دوال مركبة.

فمثلاً

$$f(z) = e^z \quad , \quad g(z) = z^2+10$$

$$f[g(z)] = e^{z^2+10} \quad , \quad g[f(z)] = (e^z)^2 + 10$$

(5.2) بعض الدوال الأولية – Some Elementary Functions

1) الدوال المتعددة الحدود (Polynomial Functions)

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

حيث $a_n \neq 0$ و $a_1, a_2 \ldots . a_n$ ثوابت و n عدد صحيح موجب يسمى بدرجة متعددة الحدود $f(z)$.

2) الدوال القياسية (Fractional Functions)

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+a_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m} \quad , \quad q(z) \neq 0$$

حيث $n,m \in \mathbb{N}$ و $a_1, a_2 \ldots . a_n$ ، $b_1, b_2 \ldots . b_n$ ثوابت.

3) الدالة الاسية (Exponential Function)

ليكن $z = x+iy$ فإن الدالة الاسية يمكن تعريفها كالتالي:

$f(z) = e^z = e^{x+iy}$

$= e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

حيث أن y تقاس بالزوايا النصف قطرية (نقية) (rad).

ملاحظة (2.2)

- $\pi = 3.14$ (rad) $= 180°$ (deg)
- احياناً يتم كتابة الدالة الاسية بالصيغة $\exp(z)$ بدلاً عن e^z .

بعض خصائص الدالة الاسية (Some Properties of the Exponential Function)

1) $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}|$

$$= e^x |(\cos y + i \sin y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}$$

$$= e^x$$

$\therefore |e^z| = e^x$

2) $e^z \neq 0$

If $z = x+i0 \longrightarrow w = e^x$

If $z = 0+iy \longrightarrow w = e^{iy} = \cos y + i \sin y$

If $z = x+iy \longrightarrow w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

If $z = 0+i0 \longrightarrow w = e^0 = 1$

3) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$

4) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{(z_1-z_2)}$

5) $e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$

6) $e^{i\pi} + 1 = 0$

4) الدالة اللوغاريتمية (Logarithmic Function)

يجب أن تكون للدالة العكسية للدالة الاسية خاصية قيم من واحد إلي متعدد . للعثور على هذه الدالة نبدأ من تعريف الدوال الاسية والدوال اللوغاريتمية في القيم الحقيقية:

$w = \log z \iff z = e^w$

$\because w = u + iv$

$z = e^{w}$

$r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) = e^{u}(\cos v + i\sin v)$

$\Rightarrow r = e^{u} \Rightarrow u = \log r \quad , v = \theta + 2k\pi = \arg z$

$w = \log z = u + iv = \log r + i\,(\theta + 2k\pi) = \log r + i\arg z$

نلاحظ أن هناك قيم لانهائية لـ $\log z$ التي تختلف بمقدار $2k\pi$. وعندما $k = 0$ قيمة $\log z$ تسمى القيمة الاساسية.

إذاً يعرف شكل الدالة اللوغاريتمية على الشكل التالي:

$\log z = \log r + i\arg z$

5) الدوال المثلثية (Trigonometric Functions)

في الفضاء الحقيقي يمكن تعريف الجيب والجيب التمام باستخدام متطابقة اويلر على النحو التالي:

$e^{ix} = \cos x + i\sin x \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \;\ldots\ldots\ldots(2)$

بجمع المعادلة (1) مع (2) ينتج:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

بطرح المعادلة (1) من (2) ينتج:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

إن هذه العلاقات هي صحيحة ايضاً في الفضاء المركب. أي:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad , \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ومنها يمكن إيجاد باقي الدوال المثلثية كما يلي:

- $\tan z = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$

- $\cot z = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{(e^{iz}-e^{-iz})}$
- $\sec z = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}$
- $\csc z = \frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}$

6) الدوال المثلثية العكسية (Inverse Trigonometric Functions)

لإيجاد تعريف للدوال المثلثية العكسية فإننا نستعمل متطابقة اويلر

Let $z = \cos w = \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, $\cos^{-1} z = w$

$\Longrightarrow e^{iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$

باستخدام قانون المميز

$$e^{iw} = \frac{-(-2z)\pm\sqrt{(-2z)^2-4}}{2}$$

$$= \frac{2z\pm\sqrt{4z^2-4}}{2}$$

$$= \frac{2z\pm2\sqrt{z^2-1}}{2}$$

$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2-1}$

وباختيار الجزء الموجب من الحل لكونه الجزء الذي يجعل قيمة $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ ينتج:

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2-1}$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$\log e^{iw} = \log(z + \sqrt{z^2-1}\,)$

$\Longrightarrow w = \frac{1}{i}\log(z + \sqrt{z^2-1}\,)$

$\because w = \cos^{-1} z$

$\therefore \cos^{-1} z = \frac{1}{i}\log(z + \sqrt{z^2-1}\,)$

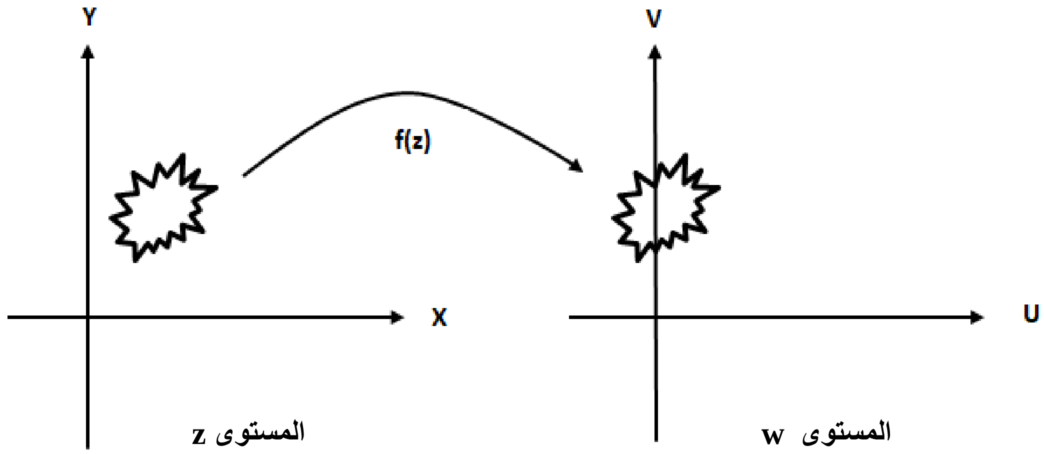
وبنفس الطريقة يمكن إيجاد:

- $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1 - z^2}\,)$
- $\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\log(\frac{i+z}{i-z})$
- $\cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\log(\frac{z+1}{z-1})$
- $\sec^{-1} z = \frac{1}{i}\log(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z})$
- $\csc^{-1} z = \frac{1}{i}\log(\frac{1+\sqrt{z^2-1}}{z})$

(6.2) التمثيل الهندسي للدالة المركبة

Geometric Representation of a Complex Function

عند دراسة الدالة $y = f(x)$ هندسياً نرسم الدالة في المستوى XY ، ولكن عند دراسة الدالة المركبة $w = f(z)$ فإن التمثيل الهندسي لهذه الدالة أكثر تعقيداً، فلرسمها نحتاج إلى أربعة أبعاد، اثنين لكل متغير مركب، ونعرض المعلومات عن الدالة w ونرسمها في مستويين منفصلين، أحدهما للمتغير z والاخر للمتغير w بحيث نحدد التقابل الكائن بين مجموعة من النقاط في المستوى الاول (المستوى z) إلى صورها في المستوى الثاني (المستوى w) كما موضح في الشكل (1.2)



شكل (1.2)

قـــد نـستـخـدم $w = f(z)$ لتـحويل نقط في نطاقها D_1 في المستوى z حتي تكون منطقة D_2 في المستوى w، وفي هذه الحالة نقول بـأن D_1 تم تحويله بواسطة f فوقياً إلى D_2، وهذا يعني تحويل منطقة في المستوى z الي منطقة أخرى في المستوى w بالتحويل $w = f(z)$.

إذا كـان هـناك منحنى C_1 في المنطقة D_1 وكل النقط على المنحنى C_1 تم تحويلها إلى المستوى w لتكون منحني C_2، فإن ذلك يعني أن المنحنى C_1 تم تحويلة إلى منحنى اخر C_2 بواسطة الـتحويل $w = f(z)$.

الان يمكن أن نـأخذ النظرة البسيطة للمعني الهندسي للدالة المركبة بمعني نحن نفحص التمثيل البياني للدالة $w = f(z)$ ، بـالتعريف لكل قيمة مـن الـمتغير الـمستقـل $z = x+iy$ (في نطاق الدالة f) الدالة تنتج قيمة وحيدة $w = u+ iv$ من المتغير التابع، كل من المتغيرين المستقل والتابع له بعدان والاثنان معاً لهما أربعة أبعـاد ممـا يجعـل رسـم بيـان الـدالة صعباً، بسبب هذه الصعوبة فالتخيل البياني للدالة المركبة يكون متأثراً باستخدام نسختين من المستوي المركب عادة يسمى المستوي المركب z والمستوي المركب w.

لكل $z = x+iy$ في نطاق الدالة f نحسب قيمة الدالة $w = u + iv$ المناظرة ثم نحدد موقعها في المستوى w بإعادة هذه العملية لكل نقطة في المجموعة S من نطاق الدالة f ينتج " صورة S تحت تأثير الدالة f " في المستوي w. وسوف نرى ونطبق هذا المفهوم البياني بالتفصيل في توضيح أمثلة الفصل الثالث بيانياً.

الفصل الثالث

التحويلات بدوال أولية

TRANSFORMATIONS WITH ELEMENTARY FUNCTIONS

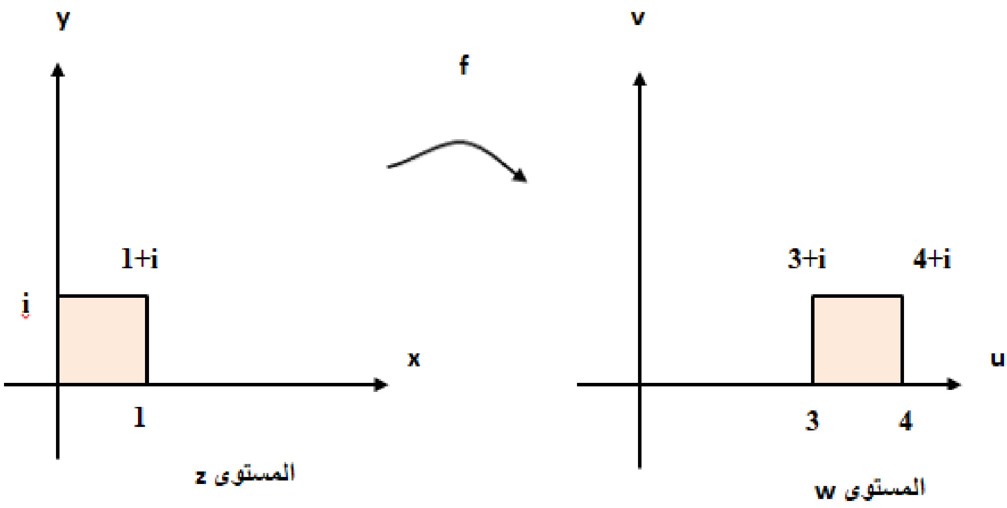
سوف ندرس في هذا الفصل مفهوم التحويل، ومن تم سنتطرق لدراسة التحويلات باستخدام دوال أولية الدوال الخطية (Linear Functions)، دالة القوي (The Power Function)، ومن ثم درسنا دالة المقلوب (The Reciprocal Function)، والدالة تنائيه الخطية (The Bilinear Function) ووضعت أمثلة متنوعة الغرض منها إيضاح موضوع التحويلات بدوال أولية بطريقة كبيرة.

(1.3) التحويل – Transformation

عند دراسة الدالة المركبة $w = f(z)$ فإن جزءاً من المستوي z تم تحويله إلي المستوي w، ولهذا فإن الدالة المركبة هنا يطلق عليها اسم تحويل (transformation).

النقطة $w_0 = f(z_0)$ تسمى صورة النقطة z_0 ويسمى المنحنى c^* في المستوي w صورة المنحنى c في المستوى z ، **فعلى سبيل المثال** تكون صورة المستطيل:

1، 1+i ، i ، 0 في المستوي z هي المستطيل 4 ، 4+i ، 3+i ، 3 تحت تأثير التحويل $f(z) = z+3$.



شكل(1.3)

(2.3) التحويل الأحادي– One-to-one Transformation

التحويل f يسمي تحويل احادياً (one - to - one) إذا كانت النقط المختلفة في النطاق D تحول إلي نقط مختلفة في المدى، بمعنى اخر التحويل f احادي إذا كان $z_1 \neq z_2$ يؤدي الى أن $f(z_1) \neq f(z_2)$.

فمثلاً

التحويل $w = e^z$ تحويل غير احادي لأن النقط ... $z = 0 , 2\pi i, 4\pi i , 6\pi i$ عندما نعوض بها في الدالة w تحول الى نقطة واحدة وهي $w = 1$.

والدالة $w = f(z) = 3z - 3i$ دالة احادية لأنه إذا كان $z_1 \neq z_2$ فإن

$$f(z_1) = 3z_1 - 3i \neq f(z_2) = 3z_2 - 3i$$

(3.3) التحويل العكسي – Invers Transformation

التحويل f يسمى تحويل عكسي إذا كان التحويل من واحد الى واحد (تناظر احادي) فإن معكوسة ويرمز له بالرمز f^{-1}.

مثال (1.3)

أوجد التحويل العكسي للتحويل $w = 3z - i$

الحل:

أولاً نثبت أن التحويل أحادي

$$f(z_1) = f(z_2) \longrightarrow z_1 = z_2$$

$$3z_1 - i = 3z_2 - i$$

$$3z_1 = 3z_2$$

$$z_1 = z_2$$

$\therefore$ الدالة أحادية

ثانيا نثبت أن التحويل فوقي

$$w = 3z - i$$

$$3z = w + i$$

$$z = \frac{w+i}{3}$$

$$f(z) = 3\left(\frac{w+i}{3}\right) - i$$

$$= w$$

$\therefore$ الدالة فوقية

التحويل f يمثل تناظر أحادي

نقوم بإيجاد التحويل العكسي

$w = f(z) = 3z - i$

بتغيير z بدلاً من w نحصل على

$z = 3w - i$

$w = \frac{z+i}{3}$

وهو التحويل العكسي

$f^{-1}(z) = \frac{z+i}{3}$

(4.3) التحويل المحافظ - Conformal Transformations

التحويل $w = f(z)$ الذي يحافظ على مقدار واتجاه زاوية التقاطع بين منحنيين عند z_0 يسمى تحويلاً محافظاً عند z_0 .

مبرهنة (1.3)

إذا كان التحويل $w = f(z)$ تحليلي على النطاق D فإنه تحويل محافظ عند كل نقطة z من النطاق D حيث $\grave{f}(z_0) \neq 0$.

مثال (2.3)

بين أن الدوال التالية محافظة للزوايا أم لا .

1) $f(z) = z^2 + z$

2) $f(z) = \frac{1}{z}$

الحل:

1) الدالة f تحليلية عند جميع نطاقها $\mathbb{C}$

$$\grave{f}(z) = 2z + 1$$

وعند التعويض عن أي قيمة من نطاق z في $\grave{f}(z)$ فإن المشتقة لا تنعدم أي أن $\grave{f}(z) \neq 0$.

∴ التحويل محافظ

2) الدالة تحليلية عند جميع نطاقها $\mathbb{C}$ ماعدا عند $z = 0$

$$\grave{f}(z) = -\frac{1}{z^2}$$

عند التعويض عن أي قيمة من النطاق z في $\acute{f}(z)$ فإن المشتقة لا تنعدم وتكون غير موجودة عند $z = 0$
أي أن التحويل محافظ عند جميع نطاق $\mathbb{C}$ ماعدا عند $z = 0$.
$\therefore$ التحويل محافظ

(5.3) تحويلات الدوال الخطية

Linear Functions Transformations

الدالة التي على الصورة

$$w = f(z) = az + b \quad \ldots.(*)$$

حيث a , b ثوابت مركبة.

عندما $a = 0$ التحويل الخطي (*) يكون تحويل ثابت، بالتالي أي منطقة من المستوى المركب ستتحول إلى نقطة واحدة $w = b$ وهذه التحويلات غير ذات أهمية من حيث دراستها وبالتالي سنفرض ان $a \neq 0$.

وسوف ندرس ثلاث حالات للتحويل على هذا النوع من الدوال:

1) الانتقال (الازاحة بمقدار b).

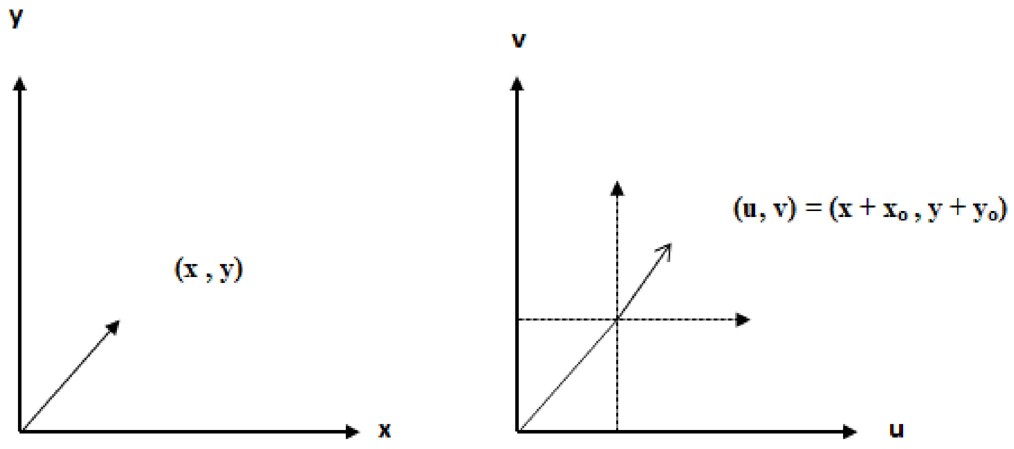
Translation By b

$$\mathbf{T(z) = z + b \quad , b \neq 0}$$

إذا كان $z = x + iy$ و $b = x_o + iy_o$ فإن:

$$T(z) = x + iy + x_o + iy_o$$
$$= (x + x_o) + (y + y_o)$$
$$\therefore (x , y) \xrightarrow{\quad T \quad} (x + x_o , y + y_o)$$

يعني أن النقطة (x , y) في المستوي z هي النقطة $(x + x_o , y + y_o)$ في المستوى w.



شكل (2.3) يمثل إزاحة النقطة (x , y) بإضافة b

ملاحظة (1.3)

- إذا كانت $x_o > 0$ فأن الانسحاب يكون اتجاه اليمين أما إذا كانت $x_o < 0$ فإن الانسحاب يكون اتجاه الشمال.
- إذا كانت $y_o > 0$ الانسحاب يكون لأعلى أما إذا كانت $y_o < 0$ يكون الانسحاب لأسفل.
- الانسحاب لا يغير في شكل ولا حجم الشكل الاصلي أي أن إذا كان الشكل في المستوى z مربع فإنه ينقل إلى مربع في المستوى w. والمثال التالي يوضح ذلك

مثال (3.3)

أوجد صورة المربع المحدد بالنقاط $1+2i \;,\; 2+2i \;,\; 2+i \;,\; 1+i$ بواسطة التحويل $T(z) = z + 2 - i$

الحل:

نفرض أن $z_4 = 1+2i \;,\; z_3 = 2+2i \;,\; z_2 = 2+i \;,\; z_1 = 1+i$ ومنها

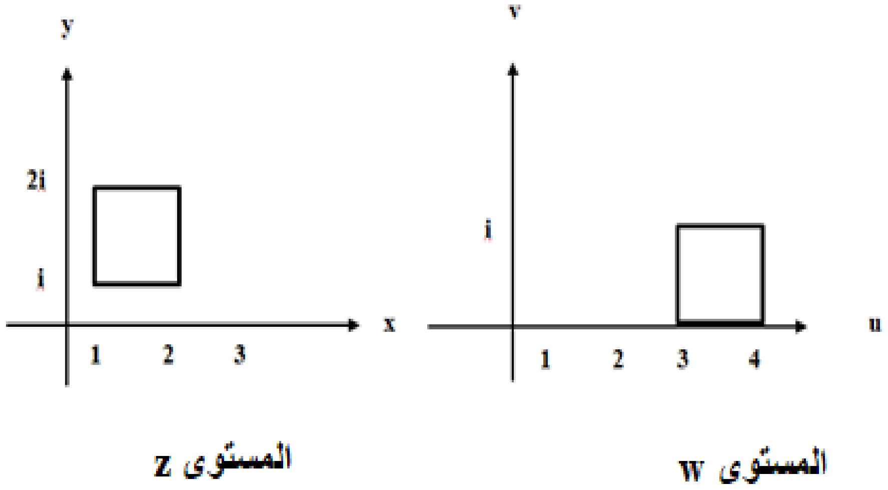
$$T(z_1) = T(1+i) = 1+i+2-i = 3$$

$$T(z_2) = T(2+i) = 2+i+2-i = 4$$

$$T(z_3) = T(2+2i) = 2+2i+2-i = 4+i$$

$$T(z_4) = T(1+2i) = 1+2i+2-i = 3+i$$

إذا صورة المربع في المستوي w محددة بالنقاط $3 , 4 , 4+i \;, 3+i$



شكل (3.3) يمثل انسحاب

2) الدوران بمقدار arg a .

Rotation by a

إذا كانت $b = 0$, a اختيارية بحيث $|a| = 1$ أي أن

$$\boxed{\mathbf{R(z) = az \ , |a| = 1 \ , a \in \mathbb{C}}}$$

إذا كان $\theta = \text{Arg}(a)$

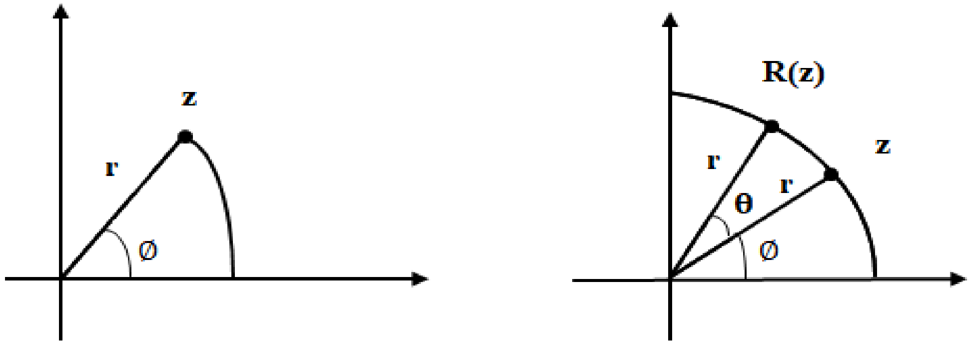
إذا $|a| = 1$, $a = e^{i\theta}$

بفرض أن $\emptyset = \arg(a)$, $r = |z|$, $z = r\, e^{i\emptyset}$

$$R(z) = az = e^{i\theta} r e^{i\emptyset} = r e^{i(\emptyset+\theta)}$$

$$\therefore R(z) = r e^{i(\emptyset+\theta)}$$

حيث θ هي زاوية الدوران . كما موضح ف الشكل (4.3)



شكل (4.3) يمثل دوران حول المركز

مثال (4.3)

أوجد صورة المحور الافقي $y = 0$ بواسطة التحويل $R(z) = (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)\, z$.

الحل:

$C : y = 0$

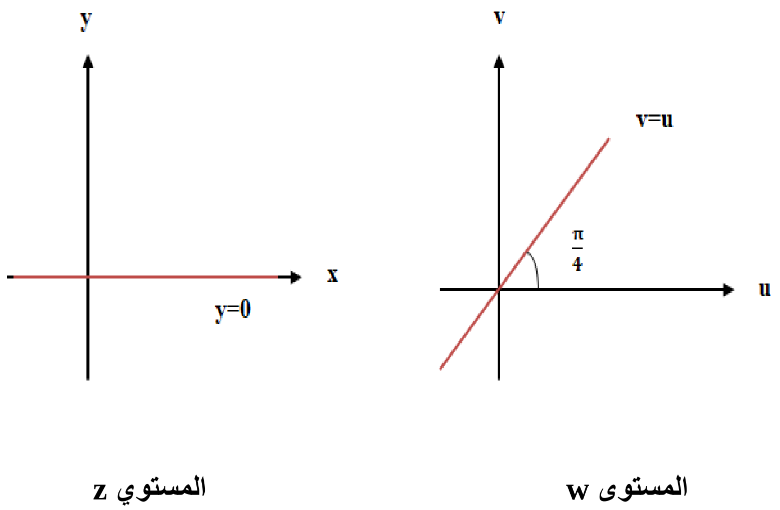
C^* : Image of $y = 0$

$a = (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)$

$\theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$a = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\therefore R(z) = r\, e^{i(\emptyset + \frac{\pi}{4})}$



شكل (5.3)

ملاحظة (2.3)

- أن إذا كان $\theta > 0$ فإن الدوران عكس عقارب الساعة (counter clockwise)
  أما إذا كان $\theta < 0$ فإن الدوران مع عقارب الساعة (clockwise).

- الدوران لا يغير شكل وحجم الشكل الاصلي ويكون الدوران حول نقطة الاصل.

3) تمديد (تكبير بمقدار a أو تصغير بمقدار a).

Magnification by a

وتكون دالة التحويل هي

$$\boxed{\mathbf{M(z) = az \quad , \; |a| \in \mathbb{R} \, , \; a \neq 1 \quad , \; |a| \neq 1 \; , b = 0}}$$

إذا كانت $z = x+iy$ فإن

$$M(z) = a\,(x+iy) \\ = ax + i\,ay$$

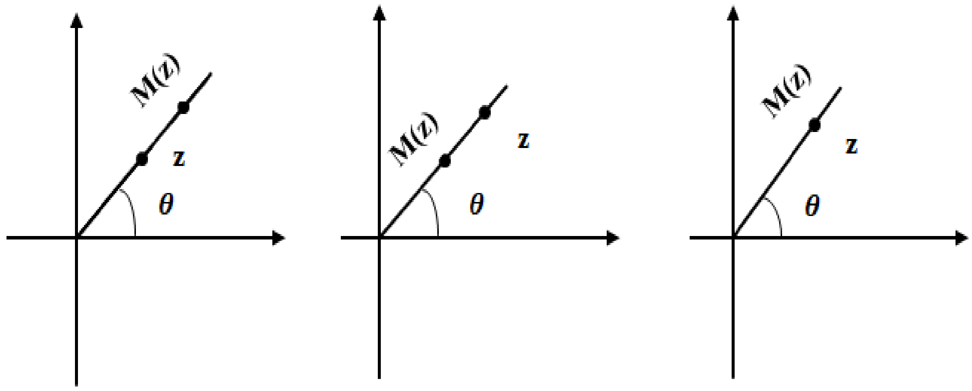
$$(x , y) \xrightarrow{\mathbf{M(z)}} (ax , ay)$$

إذا وضعنا العدد المركب z في الصورة الاسية $z = r\,e^{i\theta}$ نحصل على

$$M(z) = a\,(re^{i\theta}) = (ar)\, e^{i\theta}$$

$$\because |z| = r \quad , \therefore \; |M(z)| = ar$$

يعني أن تمديد (تكبير) (Magnification) بمقدار a مرة نسبتاً لبداية الاحداثيات إذا كان $|a| > 1$ أو إنكماش (تصغير)(Contraction) بمقدار a مرة نسبتاً لبداية الاحداثيات إذا كان $1 > |a|$. كما موضح في الشكل (6.3)



$|a| > 1$ **$0 < |a| < 1$** **$|a| = 1$**

شكل (6.3) يمثل دالتي التمدد والانكماش والدالة المحايدة

مثال (5.3)

أوجد صورة الدائرة في المنطقة c المعطي بواسطة $|z| = 2$ بواسطة التحويل $w = M(z) = 3z$

الحل:

$a = 3$

$z = 2e^{i\theta} \quad , r = |z| = 2$

$M(z) = 3 \cdot 2e^{i\theta} = 6e^{i\theta}$

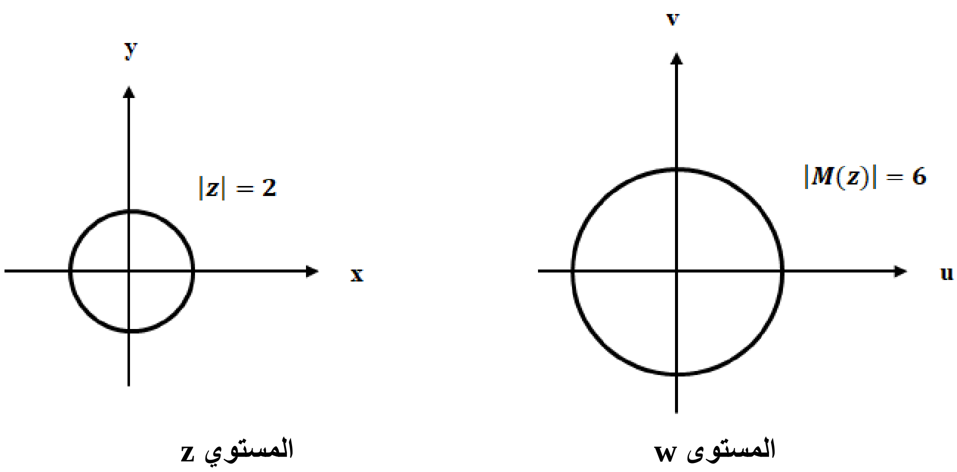
$|M(z)| = |3z|$

$= |3||z|$

$= 3 \cdot 2 = 6$

$c : |z| = 2$

$c^* : |w| = 6$



شكل (7.3)

إذاً التحويل

$$w = f(z) = az + b \quad a \neq 0 \quad , \quad a \in \mathbb{C}$$

بشكل عام هو عبارة عن تركيب لثلاثة دوال هما: الدوران $R(z)$, التمدد $M(z)$, الانتقال $T(z)$

ويمكن كتابة التحويل الخطي على الشكل:

$$w = f(z) = |a| \left(\frac{a}{|a|}\, z\right) + b \qquad , a \neq 0$$

$R(z) = \frac{a}{|a|} z \qquad , \theta = \text{Arg } a$

$M(z) = |a|\, z \qquad , |a| \in \mathbb{R}$

$T(z) = z+b$

وعند تركيب هذه الدوال

$$\begin{aligned}(T \circ M \circ R)(z) &= T(M(R(z)))\\ &= T\left(M\left(\frac{a}{|a|} z\right)\right)\\ &= T(az)\\ &= az + b\\ &= f(z)\end{aligned}$$

ملاحظة (3.3)

إذا كانت $|a| = 1$ فإنه لا يوجد تمدد ولا انكماش، وإذا كان $\arg a = 0$ يعني عدم وجود دوران، وفي حالة ما إذا كان $b = 0$ يعني عدم وجود انتقال الشكل من موقعه.

<u>فيما يلي أمثلة متنوعة على هذا التحويل</u>

مثال (6.3)

أوجد صورة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $B(3,1)$, $A(-2\ ,\ -3)$ في المستوى z بواسطة التحويل الخطي $w = (1+2i)z +3 - 4i$.

الحل:

$$w = (1+2i)z +3 - 4i$$

$A:\ z = x+iy$

$\quad = -2 - 3i$

À : w = u+iv =(1+2i)(–2–3i) + 3–4i

= –2–7i +6+3–4i

= 7–11i

B : z = x+iy

= 3+i

B̀ : w = u +iv = (1+2i)(3+i) +3–4i

= 3 +7i–2+3–4i = 4+3i

إذاً المستقيم الواصل بين النقطتين B(3+i) , A(–2 , –3i) في المستوي z ينتج بواسطة التحويل المعطي النقطتين B̀(4+3i) , À(7 , –11i) في المستوى w.

- تكبير بمقدار |a|

$$|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

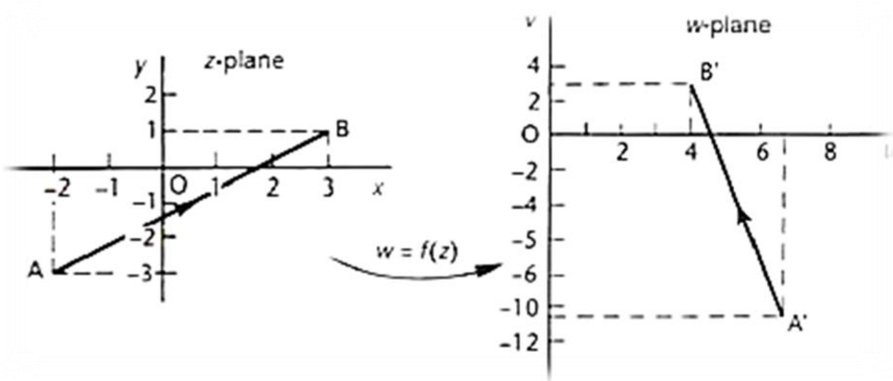
- دوران بمقدار arg a

$$\arg a = \tan^{-1}\frac{2}{1} = 63.43$$

- إزاحة بمقدار b

b = 3 – 4i

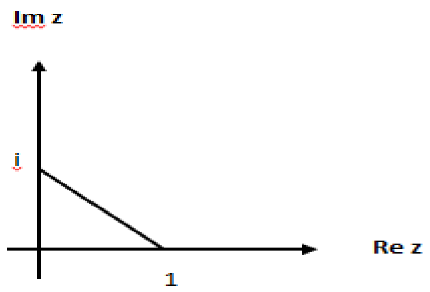
يعني أن ازيحت 3 وحدات يميناً و4 وحدات لأسفل كما موضح بالشكل (8.3) .



شكل (8.3)

مثال (7.3)

أوجد صورة التحويل الخطي f(z) = 2z



المستوى z

شكل (9.3)

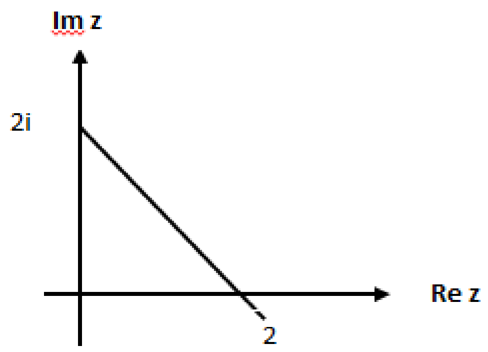
الحل:

نلاحظ أن $a = 2 \quad , b = 0$

- تكبير بمقدار $|a|$

$$|a| = |2| = \sqrt{(2)^2} = 2$$

$\therefore$ تكبير بمقدار $|a| = |2|$



المستوى z

- دوران بمقدار $\arg a$

$$\arg a = \tan^{-1}(\frac{0}{2})$$

$$= \tan^{-1}(0) = 0$$

$$z_2 = e^{i\theta} z_1$$

$$z_2 = e^0 z_1 = z_1$$

- بما أن $b = 0$ فالإزاحة لا تؤثر في الشكل

مثال (8.3)

أوجد صورة القرص المغلق $|z| \leq 1$ بواسطة التحويل $w = f(z) = (1+i)\, z$

ووضح بيانياً مراحل هذا التحويل.

الحل:

$w = (1+i)\,z$

$|w| = |1 + i||z|$

$\quad = \sqrt{2}\,|z|$

$\quad \leq \sqrt{2}$

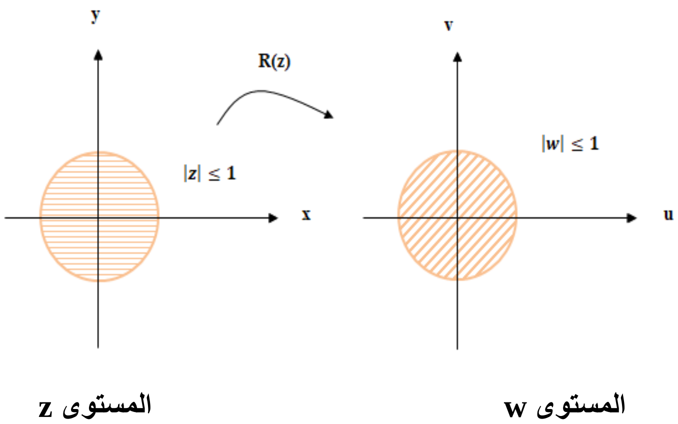
$\therefore |w| \leq \sqrt{2}$

$f(z) = (1+i)\,z$

$\quad = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) z$

$R(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) z \quad , \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

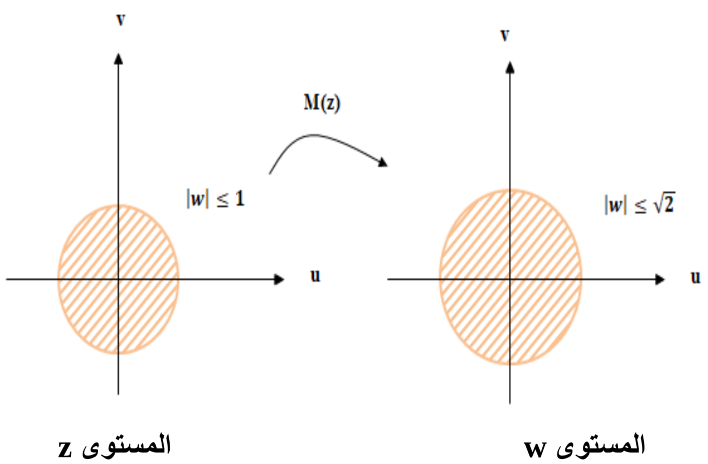
وهو دوران حول المركز بمقدار $\theta = \frac{\pi}{4}$



شكل (10.3) يمثل دوران حول المركز بواسطة التحويل المعطى

$M(z) = \sqrt{2}\,z$

يعني تكبير بمقدار $\sqrt{2}$



شكل (11.3)

مثال (9.3)

أوجد صورة المنطقة $D = \{z : |z| =1 ; Im\, z \leq 0\}$ بالتحويلات:

1) $w = f(z) = -z - 2i$

2) $w = f(z) = -2iz - 1 + 2i$

الحل:

1) نلاحظ أن $a = -1$, $b = -2i$

- بما أن $|a| = 1$ فانه لا يوجد تمدد أو انكماش
- دوران بمقدار $\arg a$

$$\arg a = \pi$$

احداث دوران بزاوية مقدارها π (التحويل $z_1=e^{i\pi}z$)

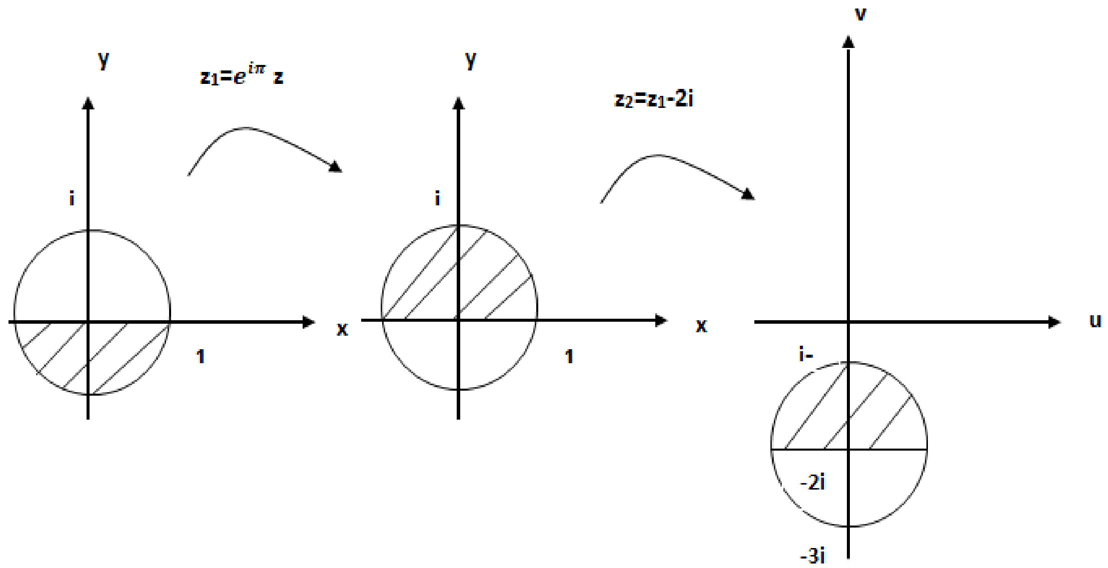
- إزاحة بمقدار b

إزاحة الى اسفل للشكل الناتج بعد الدوران بمقدار $|-2i| = 2$ من الوحدات (أي التحويل $z_2 = z_1 - 2i$).

لنحصل علي الشكل Δ ، حيث

$$\Delta =\{w \in \mathbb{C}:|w + 2i|=1 \wedge -2 \leq Im \leq -1\}$$

وفيما يلي توضيح لمراحل عملية هذا التحويل بيانياً:



شكل (12.3)

2) نلاحظ أن $a = -2i$, $b = -1+2i$

- تكبير بمقدار $|a|$

$$|a|=|-2i| = 2$$

$\therefore$ تكبير بمقدار $|a| = |2|$

(التحويل $z_1=2z$)

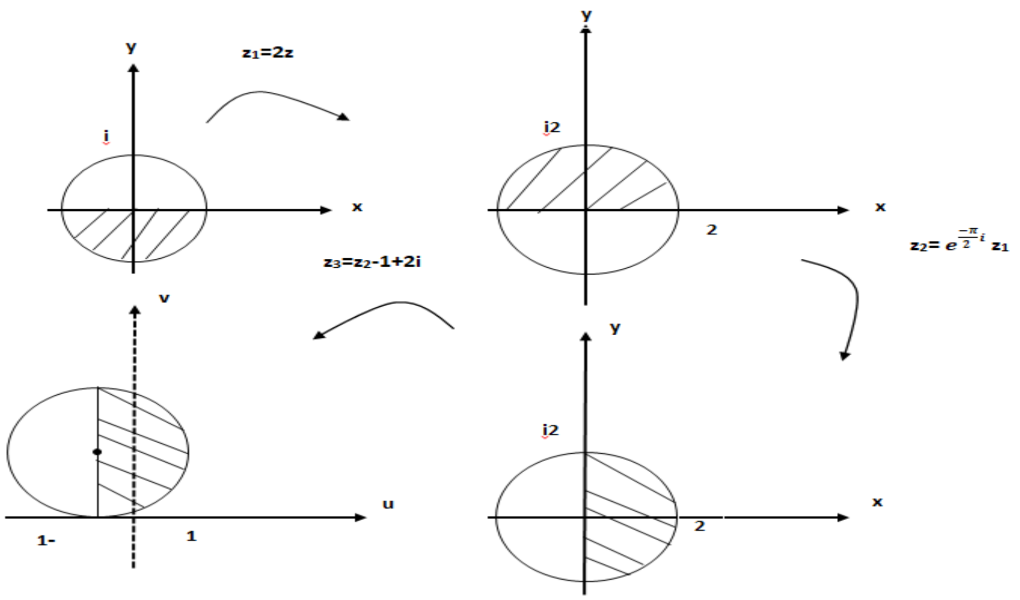
- دوران بمقدار $\arg a$

احداث دوران بزاوية مقدارها $\frac{-\pi}{2}$ (التحويل $z_2 = e^{\frac{-i\pi}{2}} z_1$)

- ازاحة بمقدار b

ازاحة للشكل الناتج بالمتجه $-1+2i$ (التحويل $z_3 = z_2 -1 +2i$)

وفيما يلي توضيح لمراحل عملية هذا التحويل بيانياً:



شكل (13.3)

مثال (10.3)

أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه $0 , 1 , i$ بواسطة كل من التحويلات الاتية:

1) $w = f(z) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)\, z$

2) $w = f(z) = \frac{1}{2}\, iz$

الحل:

1) واضح أنه لا يوجد انسحاب و إن $a \in \mathbb{C}$ إذاً هذا التحويل عبارة عن دوران فقط، نعوض بقيم z في التحويل المعطي w لإيجاد رؤوس المثلث في المستوى w.

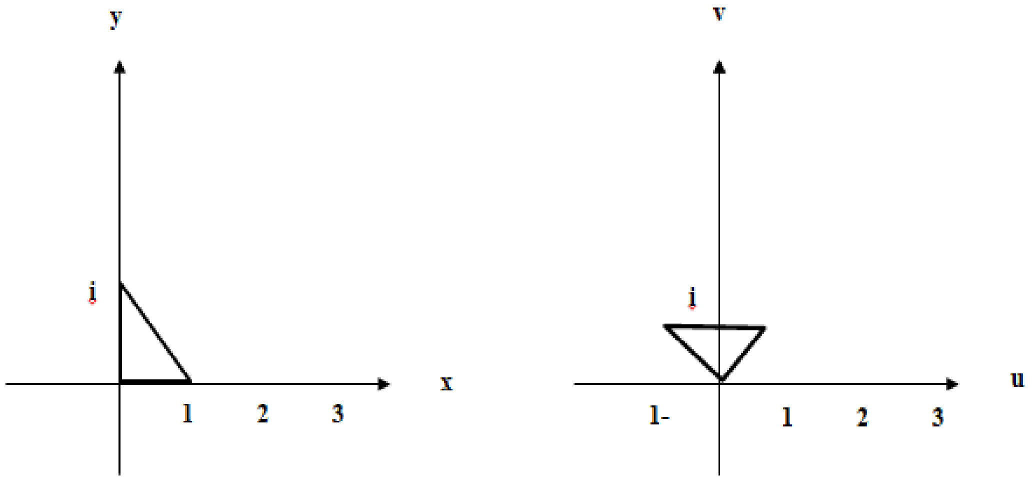
$$z_1 = 0 \quad , \quad z_2 = 1 \quad , \quad z_3 = i$$

$w_1 = f(z_1) = 0$

$w_2 = f(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$w_3 = f(z_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$\therefore$ Rotation by $\frac{\pi}{4}$



المستوى z　　　　　　المستوى w

شكل (14.3)

2) $w = f(z) = \frac{1}{2}\, i\, z$

$w_1 = f(0) = 0$

$w_2 = f(1) = \frac{1}{2}\, i$

$w_3 = f(i) = -\frac{1}{2}$

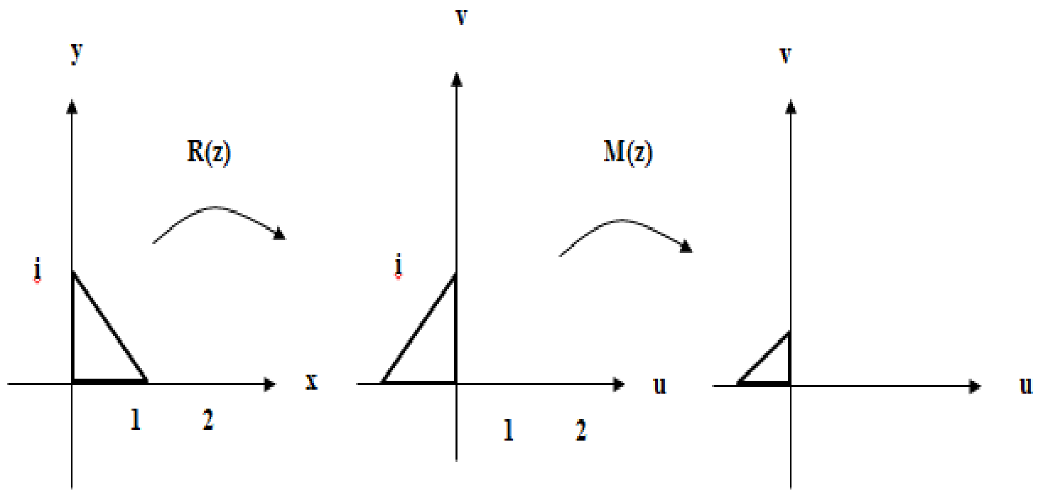
إذاً صورة المثلث في المستوى z هي مثلث في المستوى w رؤوسه $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ i , 0.

- دوران بمقدار arg a

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- انكماش بمقدار $|a|$

$$|a| = \frac{1}{2}$$



المستوى z　　　　المستوى w　　　　المستوى w

شكل (15.3)

مثال (11.3)

أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه $-2+2i$, $2i$, 0 بالتحويل

$$w = f(z) = (1+i)\, z$$

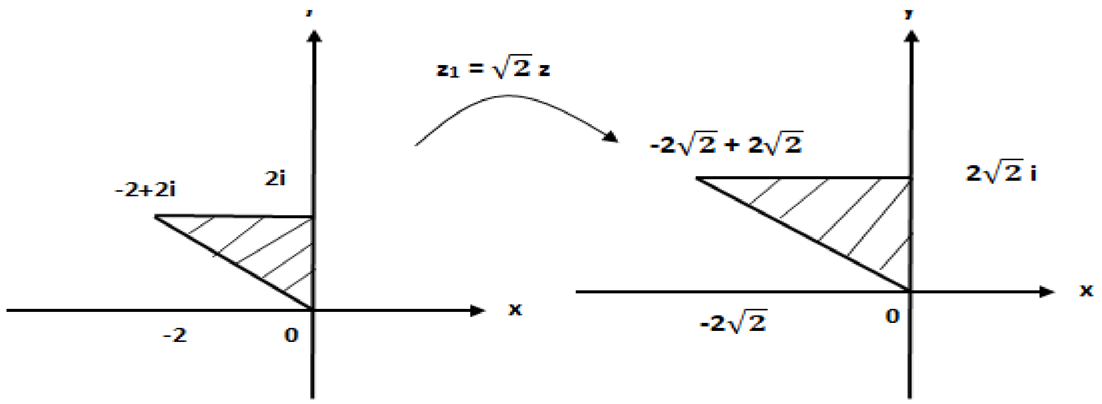
الحل:

نلاحظ أن　　$b = 0 \ , a = 1+i$

- تكبير بمقدار $|a|$

$$|a| = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, z$$



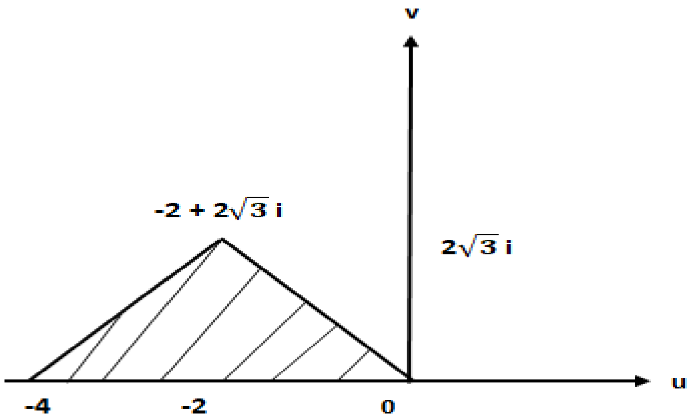
المستوى z

شكل (16.3)

• دوران بمقدار arg a

$$\arg(1+i) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$$

احداث دوران بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ (التحويل $z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}} z_1$)



المستوى w
شكل (17.3)

لا توجد إزاحة لان $b = 0$.

مثال (12.3)

كون معادلة التحويل الخطي $f(z) = az + b$ من خلال المعطيات الاتية :

1) دوران بمقدار $\frac{\pi}{4}$ ، تمدد بمقدار 2 ، انسحاب بمقدار 1+i .

2) انسحاب بمقدار $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ، دوران بمقدار $\frac{\pi}{4}$ ، تمدد بمقدار 2 .

الحل:

باستخدام الشكل $f(z) = |a|\left(\frac{a}{|a|}\,z\right) + b$

1) $f(z) = 2(e^{\frac{\pi}{4}i}\,z) + 1 + i$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z + 1 + i$

2) $f(z) = 2(z + \frac{1}{2}\sqrt{2})\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= 2e^{i\frac{\pi}{4}}\,(z + \frac{1}{2}\sqrt{2})$

$= 2e^{i\frac{\pi}{4}}z + \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) z + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) z + 1 + i$$

The Power Function – دالة القوى (6.3)

التحويل $w = f(z) = z^n \quad , n = 2 , 3 , 4 \ldots.$

يسمى تحويل القوى وغالبية خواص هذا التحويل يمكن دراستها باستخدام الاحداثيات القطبية .

إذا كانت $z = r\, e^{i\theta}$

فإن $w = r^n\, e^{in\theta}$

أي أن $|w| = r^n = \rho \quad , \quad \arg w = n\theta = \emptyset$

أي $w = \rho e^{i\emptyset}$

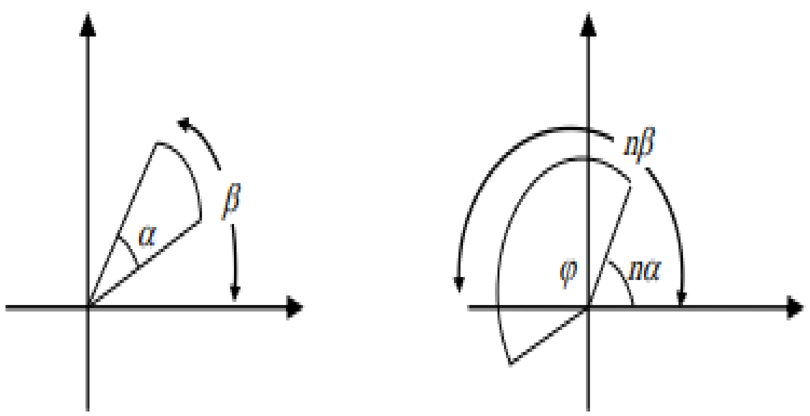
وهذا يعني انه تحت تأثير تحويل القوى ، النقطة z التي مقياسها r وسعتها θ تنقل إلى نقطة قياسها r^n وسعتها $n\theta$ ، **على سبيل المثال**:

النقطة $z = 2e^{iI_2}$ تحت تأثير التحويل $w = z^3$ تنقل الي النقطة $w = 8e^{i3I_2}$.

بصفة عامة ينقل الشعاع الذي رأسه نقطة الاصل ويصنع مع الاتجاه الموجب للمحور الحقيقي زاوية α أي ان الشعاع رأسه نقطة الاصل ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مقدارها $n\,\alpha$

أيضاً أي قطاع دائري مركزه نقطة الاصل ونصف قطره r وزاويته $\alpha \le \theta \le \beta$ الى قطاع دائري مركزه نقطة الاصل ونصف قطرة r^n وزاوية $n\,\alpha \le \varphi_0 = \theta_0 \le n\beta$

موضح في الشكل (18.3).



شكل (18.3)

ايضاً المستوى z ينقل على المستوى w عدد n من المرات ، أي أن كل نقطة $w \neq 0$ في المستوى w هي صورة n من نقاط المستوى z المختلفة.

مثال (13.3)

تحت تأثير التحويل $w = z^2$ أوجد صورة

القطع الزائدي $x^2 - y^2 = c$, القطع الزائدي $2xy = k$

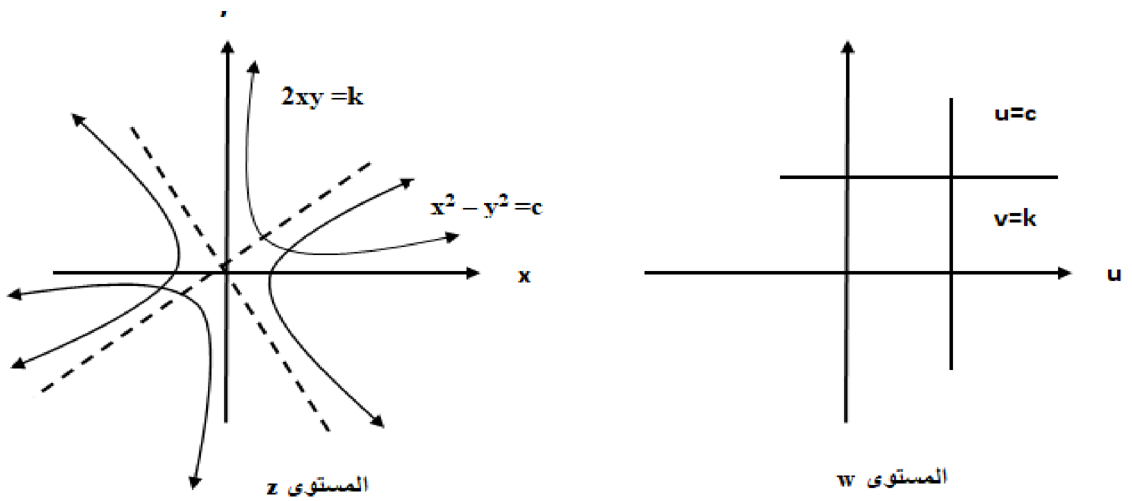
الحل:

بدلالة الاحداثيات الكارتيزية تكون التحويلة $w = z^2$ هي

$$u + iv = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

أي أن
$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy$$

وبالتالي فإن صورة القطع الزائد $x^2 - y^2 = c$ تكون الخط المستقيم $u = c$، كما أن صورة القطع الزائد $2xy = k$ تكون المستقيم $v = k$



شكل (19.3)

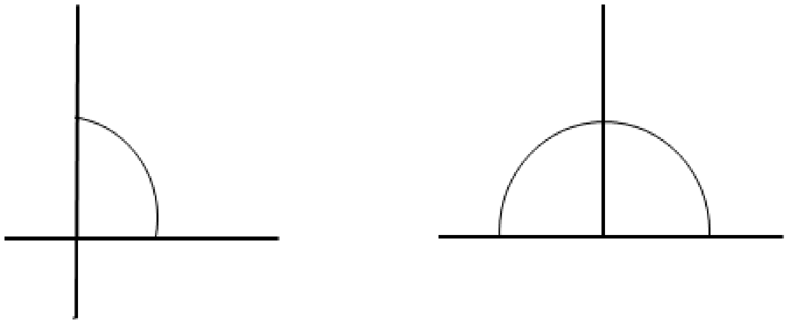
بدلالة الاحداثيات القطبية، إذا كان $z = r\,e^{i\theta}$, $w = \rho\,e^{i\varphi}$

فإن
$$\rho\,e^{i\varphi} = r^2\,e^{2i\theta}$$

أي أن:
$$|w| = |z|^2 \quad , \quad \arg w = 2 \arg z$$

لاحـظ أن الـربع الاول فــي المستوى z : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ يحـول الــى النصف العلوي فــي المسـتوى w: $0 \le \emptyset \le \pi$ حيث $\emptyset = \arg w = 2\theta$

كما موضح في الشكل (20.3)



المستوى w　　　　　　　　　　المستوى z

شكل (20.3)

مثال (14.3)

أوجد صورة المنطقة $\frac{1}{2} \le x \le 1$ بواسطة التحويل $w = z^2$.

الحل:

$w = z^2$

$u+iv = (x+iy)^2$

$u+iv = x^2 +(iy)^2 + 2(xy)i$

$u+iv = x^2 - y^2 + i(2xy)$

ومنها

$u = x^2 - y^2 \qquad , \qquad v = 2xy$

- when $x = \frac{1}{2}$

$u = \frac{1}{4} - y^2 \qquad , \quad v = y$

نعوض بقيمة y في u نحصل على

$u = \frac{1}{4} - v^2$

$v^2 = \frac{1}{4} - u$

$v^2 = -\left(u - \frac{1}{4} \right)$ ……….. (1)

من المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$(y - y_0)^2 = 4a\,(x - x_0)$

نجد أن $(u_0 , v_0) = \left(\frac{1}{4} , 0\right)$

- $x = 1$

$u = 1 - y^2 \qquad , v = 2y \longrightarrow y = \frac{1}{2} v$

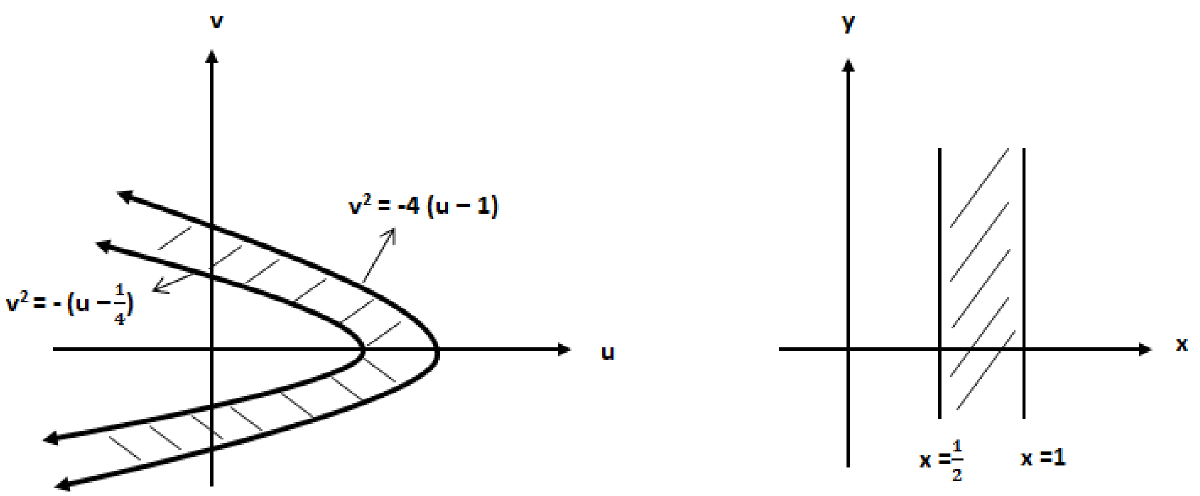
نعوض بقيمة y في u

$u = 1 - \frac{1}{4} v^2$

$u = \frac{4 - v^2}{4}$

$v^2 = 4 - 4u$ ……………. (2)

$(u_0 , v_0) = (1 , 0)$



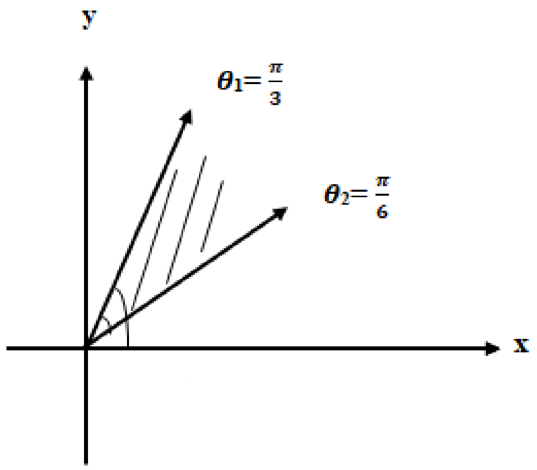
المستوى w

المستوى z

شكل (21.3)

مثال (15.3)

بدلالة الاحداثيات القطبية أوجد صورة الشكل(22.3) المعطى بواسطة التحويل $w = z^3$.



شكل (22.3)

الحل:

$z = r\, e^{i\theta}$

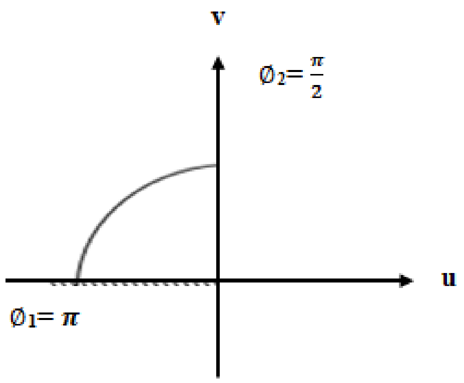
$w = z^3 = r^3\, e^{i3\theta}$

$\emptyset_1 = 3\theta_1$

$\emptyset_1 = 3\,\frac{\pi}{3} = \pi$

$\emptyset_2 = 3\theta_2$

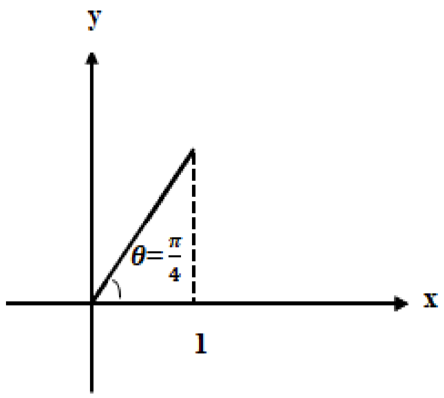
$\emptyset_2 = 3\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$



شكل (23.3)

مثال (16.3)

بدلالة الاحداثيات القطبية أوجد صورة الشكل(24.3) المعطى بواسطة التحويل $w = z^4$.



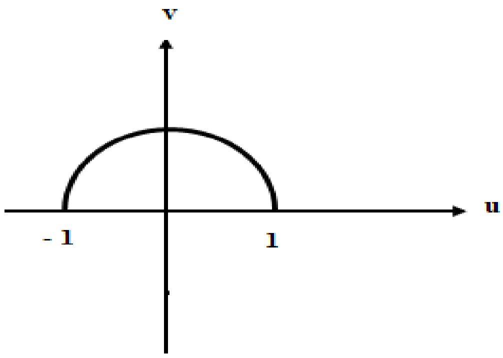
شكل (24.3)

الحل:

$w = z^4$

$z^4 = r^4\, e^{i4\theta}$

$\emptyset = 4\,\frac{\pi}{4} = \pi \qquad , \quad \rho = r^4 = 1$



شكل (25.3)

(7.3) دالة المقلوب – The Reciprocal Function

هذا التحويل يكون علي الصورة

$$f(z) = w = \frac{1}{z}$$

واضح أن نطاق هذه الدالة هو $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$

ونلاحظ أن $\quad |w| = \frac{1}{|z|}$

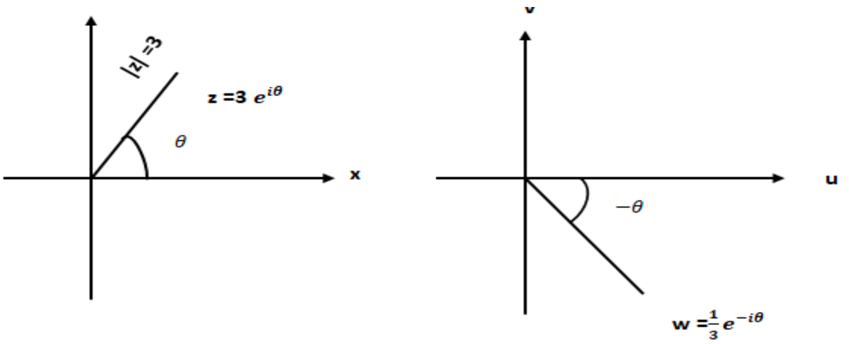
$$\arg w = -\arg z$$

ومن هذا التحويل نرى أن

- أي نقطة داخل الدائرة $|z| = 1$ تحول الى خارجها يعني أن إذا كان $|z| > 1$ فإن $|w| < 1$.
- وأي نقطة خارجها تحول إلى داخلها يعني أن إذا كان $|z| < 1$ فإن $|w| > 1$.
- وأن أي نقطة علي الدائرة $|z| = 1$ تحول إلى نفسها $|w| = 1$.
- إذا كان المنحنى موجة في المستوى z ضد عقارب الساعة فتكون صورته في المستوى w منحنى موجه مع عقارب الساعة .

ويكون هناك انعكاس بالنسبة للمحور x فعلى سبيل المثال:

إذا كانت $z = 3e^{i\theta}$ فإن $w = \frac{1}{3}e^{-i\theta}$ والشكل (26.3) يوضح ذلك.



المستوى z **المستوى w**

شكل (26.3)

ملاحظة (4.3)

إذا كان $w = \frac{1}{z}$

أي أن $u + iv = \frac{1}{x+iy}$

بالضرب في مرافق المقام نحصل على

$$u + iv = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

وعليه يكون $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$

وكذلك إذا كان $z = \frac{1}{w}$

فإن $x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad , \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$

مثال (17.3)

أوجد صورة الخط المستقيم $Ax + By = c$ بواسطة التحويل $w = \frac{1}{z}$.

الحل:

بما أن $z = x + iy$

$$w = \frac{1}{z}$$

$$u+iv = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad , \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

بالتعويض في معادلة المستقيم المعطاة نحصل على

$$A\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + B\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) = C$$

أي أن:

$$C(u^2 + v^2) - Au + Bv = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

إذا كان $C = 0$ فإن المعادلة (*) تمثل معادلة خط مستقيم معادلته هي

$$Au - bv = 0$$

اما إذا كانت $C \neq 0$ فإن المعادلة (*) تمثل معادلة دائرة مركزها $\frac{A}{2C} , \frac{-B}{2C}$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2}$ وتمر بنقطة الأصل.

أي أن:

$Cu^2 + Cv^2 - Au + Bv = 0$

$u + v - \frac{A}{C}u + \frac{B}{C}v = 0$

$u^2 - \frac{A}{C}u + \frac{A^2}{4C^2} - \frac{A^2}{4C^2} + v^2 + \frac{B}{C}v + \frac{B^2}{4C^2} - \frac{B^2}{4C^2} = 0$

$(u - \frac{A}{2C})^2 + (v + \frac{B}{2C})^2 = \frac{A^2}{4C^2} + \frac{B^2}{4C^2}$

من المثال السابق (17.3) نرى أن التحويل $w = \frac{1}{z}$ يحول المستقيم إلى دائرة في حالة عدم مرور هذا المستقيم بنقطة الاصل أي عندما $(c \neq 0)$، ويحول الخط المستقيم إلى خط مستقيم في حالة مرور هذا المستقيم بنقطة الاصل أي عندما $(c = 0)$ والسبب يعود إلى العلاقة $|w| = \frac{1}{|z|}$ فعند مرور المستقيم بنقطة الاصل أي عندما $z = 0$ نجد أن $|w| \longrightarrow \infty$، وهذا لا يتحقق في الدوائر وعليه لابد أن تكون الصورة في هذه الحالة عبارة عن خط مستقيم.

مثال (18.3)

باستخدام التحويل $w = \frac{1}{z}$ أوجد صورة كل من

1) الخط العمودي $x = c$.
2) الخط الافقي $y = c$.

الحل:

1) بما أن $z = c + iy$

وأن $w = \frac{1}{z}$ فإن $u + iv = \frac{1}{c+iy} = \frac{c-iy}{c^2+y^2}$

$u = \frac{c}{c^2+y^2} \quad , \quad v = \frac{-y}{c^2+y^2}$

$x = \frac{u}{u^2+v^2}$

بالتعويض في معادلة الخط المستقيم نحصل على

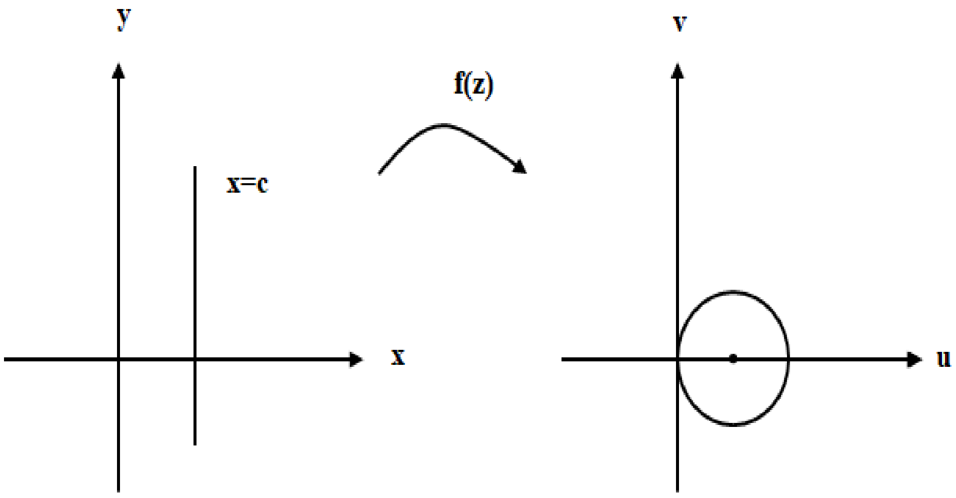
$$\frac{u}{u^2 + v^2} = c$$

$$c\,(u^2 + v^2) - u = 0$$ ومنها

∴ دائره مركزها $(\frac{1}{2c}, 0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2c}$ وتمر بنقطة الاصل

$$(u - \frac{1}{2c})^2 - v^2 = (\frac{1}{2c})^2$$

أي أن صورة المستقيم $x = c$ هي الدائرة التي مركزها النقطة $(\frac{1}{2c}, 0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2c}$.



المستوى z المستوى w

شكل (27.3)

2) بما أن $z = x + ic$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{x - ic}{x^2 + c^2}$$

$$u + iv = \frac{x - ic}{x^2 + c^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2 + c^2} \qquad , \qquad v = \frac{-c}{x^2 + c^2}$$

$$y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

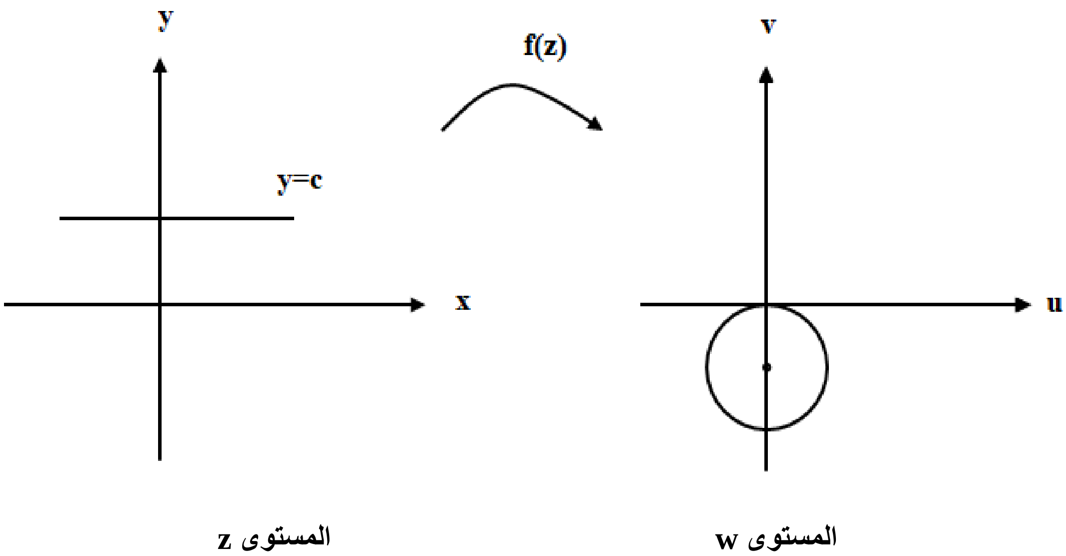
$$\frac{-v}{u^2 + v^2} = c$$

ومنها $c(u^2+v^2)-u=0$

إذا معادلة دائرة مركزها $(0, \frac{-1}{2c})$ ونصف قطرها $\frac{1}{2c}$ وتمر بنقطة الاصل

$$u^2+(v+\frac{1}{2c})^2=(\frac{1}{2c})^2$$

أي أن صورة المستقيم $y=c$ هي الدائرة التي مركزها النقطة $(0, \frac{-1}{2c})$ ونصف قطرها $\frac{1}{2c}$.



شكل (28.3)

مثال (19.3)

تحت تأثير الدالة $w=\frac{1}{z}$ أوجد صورة كل من:

1) الخطين المستقيمان المتعامدان $x-y+2=0$, $x+y-2=0$.

2) الدائرة $x^2+(y-1)^2=1$.

3) الدائرة $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

الحل:

1) بما أن $y=\frac{-v}{u^2+v^2}$, $x=\frac{u}{u^2+v^2}$

بالتعويض في معادلة المستقيم $x-y+2=0$ نجد أن

$$\frac{u}{u^2+v^2}+\frac{v}{u^2+v^2}+2=0$$

ومنها نجد أن صورة المستقيم $x - y + 2 = 0$ هي الدائرة

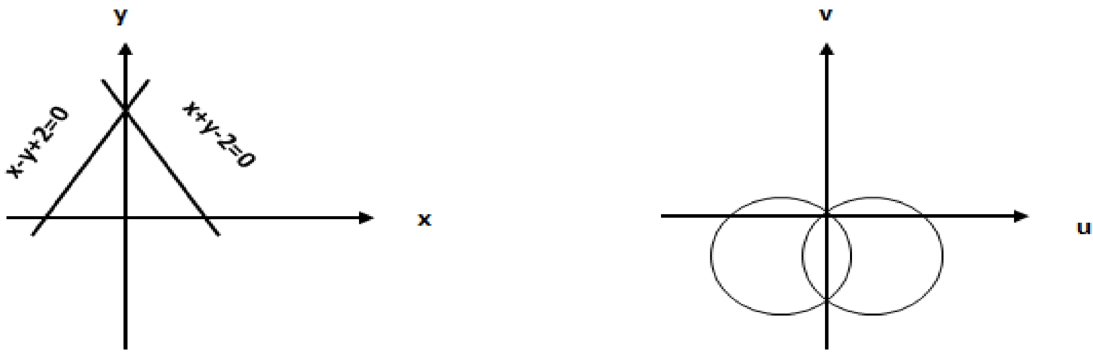
$$2(u^2+v^2) + u + v = 0$$

$$\text{or} \quad (u + \tfrac{1}{4})^2 + (v + \tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{1}{8}$$

وأيضاً صورة المستقيم $x + y - 2 = 0$ هي الدائرة

$$-2(u^2+v^2) + u - v = 0$$

$$\text{or} \quad (u - \tfrac{1}{4})^2 + (v + \tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{1}{8}$$



المستوى z المستوى w

شكل (29.3)

المستقيمان يتقاطعان على التعامد عند النقطة $z = 2i$ والدائرتان تتقاطعان على التعامد عند النقطتين $w = \frac{-i}{2}$, $w = 0$.

2) الدائرة $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ أو $x^2 + y^2 - 2y = 0$ هي دائرة مركزها $(0,1)$ ونصف قطرها 1 وتمر بنقطة الاصل تنقل الى المستقيم $1+2v = 0$.

بما أن $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$, $x = \frac{u}{u^2+v^2}$

بالتعويض في المعادلة المعطاة

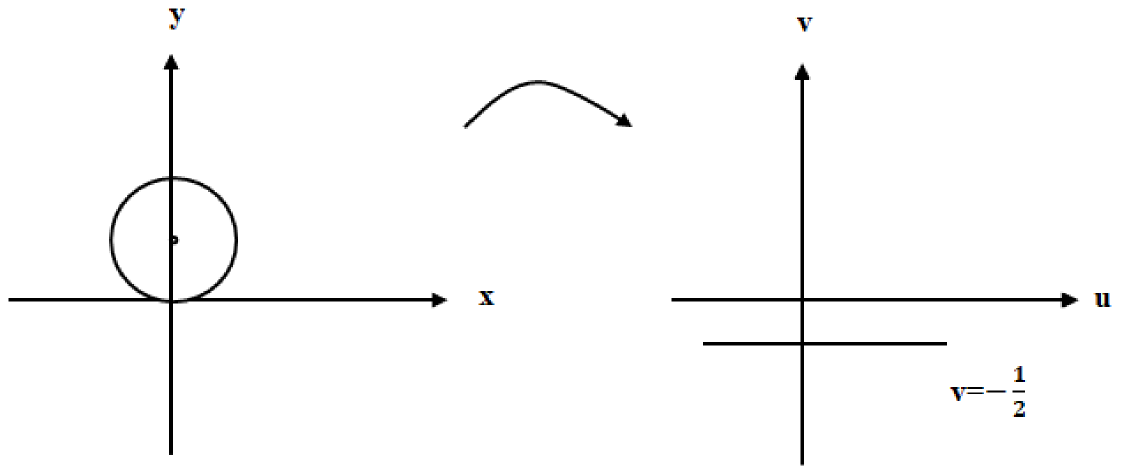
$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2} - 1\right)^2 = 1$$

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2 + \frac{2v}{u^2+v^2} + 1 = 1$$

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{2v}{u^2+v^2} = 0$$

$$u^2 + v^2 + 2v(u^2 + v^2) = 0$$

$$1+2v = 0$$



شكل (30.3)

3) الدائرة $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ هي دائرة مركزها $(-1,2)$ ونصف قطرها 2 ولا تمر بنقطة الاصل ويمكن كتابتها على الصورة $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ تنقل إلى الدائرة $u^2 + v^2 + 2u - 4v + 1 = 0$.

(8.3) الدالة ثنائية الخطية – The Bilinear Function

إذا كانت a , b, c, d ثوابت مركبة فإن:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad - bc \neq 0$$

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \ldots.(*)$$

تسمى بالتحويل ثنائي الخطية أو التحويل الخطي الكسري.

الواضح أنه عندما $c = 0$ فإن هذه التحويلة تصبح تحويلة خطية ولذلك سنفترض أن $c \neq 0$ بنفس الطريقة التي اتبعت مع تحويل التعاكس فإن المعادلة (*) تحويلة احادية (one to one) من z المستوى الممتد على نفسه حيث $z = \frac{-d}{c}$ تنقل إلى $w = \infty$ ، $z = \infty$ تنقل إلى $w = \frac{a}{c}$.

من أجل دراسة هذا التحويل نكتبه في صورته القطبية، لذلك نعتبر أن:

$$z = r\,e^{i\theta} \quad , \quad w = \rho e^{i\emptyset}$$

ومنها

$$w = \frac{1}{r}\, e^{-i\theta} = \rho e^{i\emptyset}$$

وهذا التحويل يمكن التعبير عنه بـ $\rho = \frac{1}{r}$, $\emptyset = -\theta$ ويحول أي نقطة داخل دائرة الوحدة $|z| = 1$ الي نقطة خارج هذه الدائرة، ودائرة الوحدة بهذا التحويل تتحول الي نفسها.

ولهذا التحويل خصائص هامة كثيرة نلخصها فيما يلي:

1) الدالة f مطابقة عند جميع الاعداد المركبة عدا $z_0 = -\frac{d}{c}$.

2) الدالة f واحد – لواحد كذلك على جميع نقاط المستوى عدا النقطة $-\frac{d}{c}$ أي على المجال $D = \mathbb{C}\text{-}\{-\frac{d}{c}\}$.

3) لـــكون هـــذه الـدالـــة واحداً – لواحـــد على المجال $D = \mathbb{C}\text{-}\{-\frac{d}{c}\}$ فيوجد لها دالة عكسية هي

$$z = h(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

حيث أن

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

ويمكن كتابة كل منهما بدلالة المتغيرين z , w كمـــا يلــــي:

$$az + b = wcz + dw$$

ومن هذه العلاقة تبين لنا سبب التسمية باسم ثنائي الخطية فهذه العلاقة تبين أن الدالة خطية بالمتغير z وهي كذلك خطية بالمتغير w.

4) من أهم خصائص هذا التحويل انه ينقل مجموعة الدوائر والخطوط المستقيمة الى نفسها أي أن صورة الدائرة إما أن تكون دائرة أو خطاً مستقيماً وكذلك صورة الخط المستقيم إما أن تكون دائرة أو خطاً مستقيماً .

وفيما يلي أمثلة توضح الخاصية (4):

مثال (20.3)

أوجد صورة $|z| = 2$ بواسطة التحويل $w(z) = \frac{z+2}{z-1}$.

الحل:

$$w = \frac{z+2}{z-1}$$

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

$$z = \frac{w+2}{w-1}$$

$$\because |z| = 2$$

$$\left|\frac{w+2}{w-1}\right| = 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{|w+2|}{|w-1|} = 2$$

$$|w+2| = 2|w-1|$$

$$|u+iv+2| = 2|u+iv-1|$$

$$\sqrt{(u+2)^2+v^2} = 2\sqrt{(u-1)^2+v^2}$$

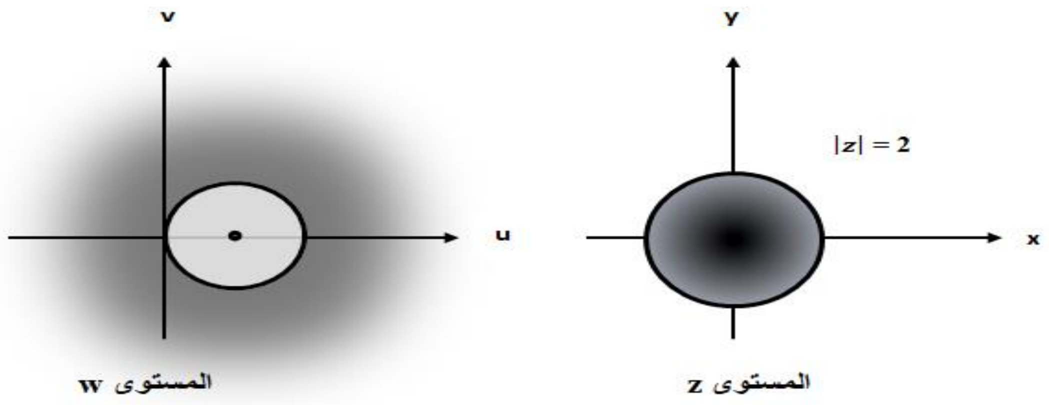
بتربيع الطرفين نحصل على

$$u^2+2u+4+v^2 = 4u^2-4u+4v^2$$

$$3u^2+3v^2-6u = 0$$

$$u^2+v^2-2u = 0$$

وهي معادلة دائرة مركزها (1 ، 0) ونصف قطرها يساوي 1.



شكل (31.3)

مثال (21.3)

أوجد صورة $D = \{ z : |z| \geq 2 \ , \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ بواسطة التحويل $w(z) = \frac{z}{z-2}$.

الحل:

$$|z| = 2 \quad , \quad y \geq 0$$

$$w = \frac{z}{z-2} \longrightarrow z = \frac{2w}{w-1}$$

$$\because |z| = 2$$

$$\left|\frac{2w}{w-1}\right| = 2$$

$$|w| = |w-1|$$

$$u^2+v^2 = (u-1)^2+v^2$$

$$0 = -2u+1$$

$$u = \frac{1}{2}$$

$y \geq 0$

$\frac{z-z}{2i} \geq 0$

$z - z \geq 0$

$\frac{2w}{w-1} - \frac{2\overline{w}}{\overline{w}-1} \geq 0$

$w\overline{w} - w - \overline{w}w + \overline{w} \geq 0$

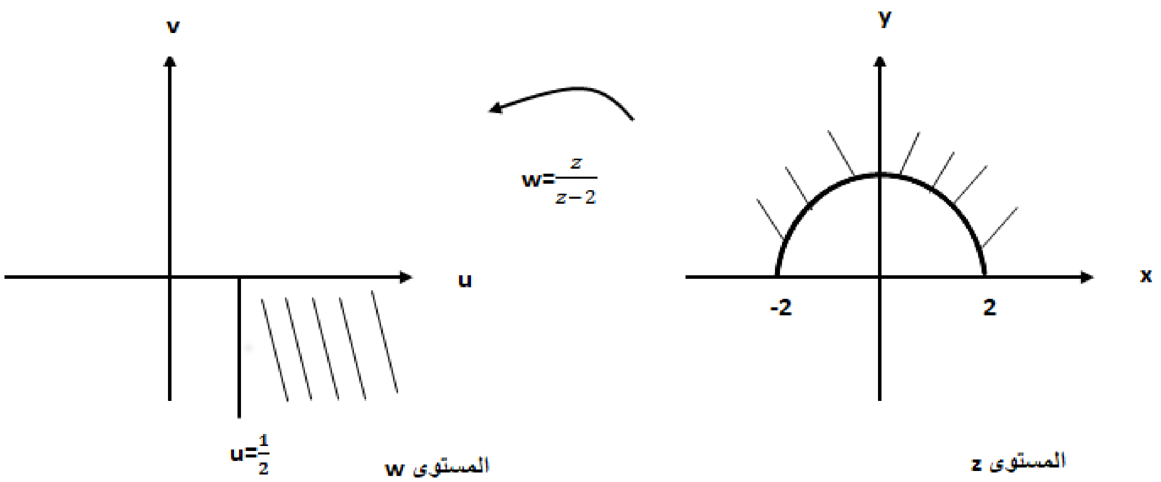
$-w + w \geq 0$

$w - w \leq 0$

$(u+iv) - (u - iv) \leq 0$

$2iv \leq 0$

$v \leq 0$



شكل (32.3)

مثال (22.3)

أوجد صورة المستقيم $x = 1$ بواسطة التحويل $w(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

الحل:

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

$$x = 1 \text{ or } z = 1+iy \quad , \quad -\infty < y < \infty$$

$$w = \frac{iy}{2+iy}$$

$$w = \frac{y^2-2iy}{y^2+4}$$

$$u+iv = \frac{y^2}{y^2+4} - \frac{2iy}{y^2+4}$$

$$u = \frac{y^2}{y^2+4} \quad , \quad v = \frac{-2y}{y^2+4} \longrightarrow (1)$$

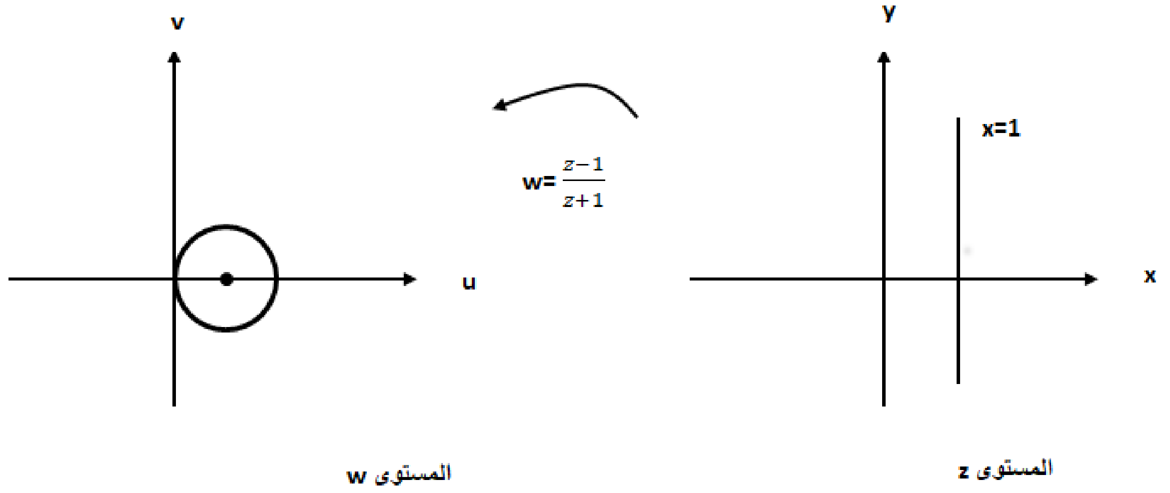
$$\frac{u}{v} = \frac{-y}{2}$$

$$y = \frac{2u}{v}$$

نعوض بقيمة y في (1) نحصل على

$$u = \frac{u^2}{u^2+v^2} \quad \text{or} \quad u^2 + v^2 - u = 0$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(\frac{1}{2}$ ، $0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.



شكل (33.3)

تعريف (3.2)

النسبة التبادلية (cross ratio) لأربعة أعداد مركبة مختلفة z_1 , z_2 , z_3 , z_4 تعرف كما يلي:

$$(z_1 , z_2 , z_3 , z_4) = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}$$

لإيجاد تحويل ثنائي الخطية الذي ينقل النقاط z_1 , z_2 , z_3 الى w_1 , w_2 , w_3 على الترتيب فإننا نجد w كدالة في z من النسبة التالية:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

هذه علاقة جبرية تبين أن صورة z_1 هي w_1 وصورة z_2 هي w_2 وكذلك صورة z_3 هي w_3.

مثال (23.3)

أوجد التحويل الثنائي الخطي الذي يحول نقاط $z = 2 , 1 , 0$ الى النقاط $w = 1 , 0 ,i$ على الترتيب.

الحل:

$z_1 = 2 \ , z_2 = 1 \ \ , z_3 = 0$
$w_1 = 1 \ , \ w_2 = 0 \ , w_3 = i$

باستخدام النسبة

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

بالتعويض نجد أن

$$\frac{(w-1)(0-i)}{(w-i)(0-1)} = \frac{(z-2)(1-0)}{(z-0)(1-2)}$$

$$\frac{(w-1)(-i)}{(w-i)(-1)} = \frac{(z-2)}{-z}$$

$$\frac{i(w-1)}{(w-i)} = \frac{(z-2)}{-z}$$

بضرب الطرفين في الوسطين نحصل على

$$-zi(w-1) = (z-2)(w-i)$$

$$-zwi + zi = zw - zi - 2w + 2i$$

$$-zwi - zw + 2w = -2zi + 2i$$

$$w(-zi - z + 2) = -2zi + 2i$$

$$w = \frac{-2zi+2i}{-zi-z+2}$$

$$= \frac{-(2zi-2i)}{-(zi+z-2)}$$

$$\therefore w = \frac{2zi-2i}{(1+i)z-2}$$

مثال (24.3)

أوجد التحويل الخطي الثنائي الذي يحول النقاط $z = 0 , -i , -1$ إلي النقاط $w = i , 1 , 0$ على الترتيب.

الحل:

بما أن $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ....(*)

نعوض بقيم z , w في (*) تتكون لدينا ثلاثة معادلات وهي:

$$i = \frac{b}{d} \qquad (1)$$

$$1 = \frac{-ai+b}{-ci+d} \qquad (2)$$

$$0 = \frac{-a+b}{-c+d} \qquad (3)$$

ومن المعادلة (3) نجد أن $a = b$

ومن المعادلة (1) نجد أن $d = -ib = -ia$

ومن المعادلة (2) نجد أن $-ci + d = -ai + b$

$$-ci - ia = -ai + a$$

$$c = ia$$

لذلك تكون

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+a}{iaz-ia} = -i\frac{(z+1)}{(z-1)}$$

وهو التحويل المطلوب الذي يحول نقاط z الي نقاط w.

مثال (25.3)

أوجد التحويل الثنائي الخطي الذي يحول نقاط $z = 1 , -i , i$ الى النقاط $w = \infty , 1 , 0$ على الترتيب .

الحل:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

نعوض بنقاط z , w نحصل على

$$\frac{1}{0} = \frac{a+b}{c+d} \qquad (1)$$

$$1 = \frac{-ia+b}{-ic+d} \qquad (2)$$

$$0 = \frac{ia+b}{ic+d} \qquad (3)$$

من المعادلة (3) نجد أن $a = ib \;\; , \;\; b = -ia$

ومن المعادلة (1) نجد أن $c = -d$

ومن المعادلة (2) نجد أن $c = \frac{2ia}{i+1} \quad , \quad d = \frac{-2ia}{1+i}$

إذاً

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az-ia}{\frac{2ia}{i+1}z - \frac{2ia}{i+1}} = \frac{(z-i)(i+1)}{2i(z-1)}$$

مثال (26.3)

أوجد صورة نصف المستوى العلوي $D = \{ z : \text{Im } z > 0 \}$ بالتحويل

$$w = f(z) = \frac{(z-i)}{(z+i)}$$

الحل:

إذا ثبتنا ثلاثة من النقاط المختلفة على حدود المنطقة D المحور الحقيقي $(\text{Im } z = 0)$ ولتكن $z = \infty$, $z = 1$, $z = 0$ وصورها بالتحويل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ هي $f(\infty) = 1$, $f(1) = \frac{1-i}{1+i}$, $f(0) = -1$ هذه الصور بالضرورة تقع على الدائرة حيث انها تمثل صور لنقاط حدية فإذا كانت تعطى بـ

$$\tau = \{u + iv : (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = r^2\}$$

ومن خلال التعويض بالنقاط $w = -1$, $w = -i$, $w = 1$ في معادلة الدائرة τ لنحصل على الأنظمة التالية:

$$(-1-u_0)^2 + {v_0}^2 = r^2$$

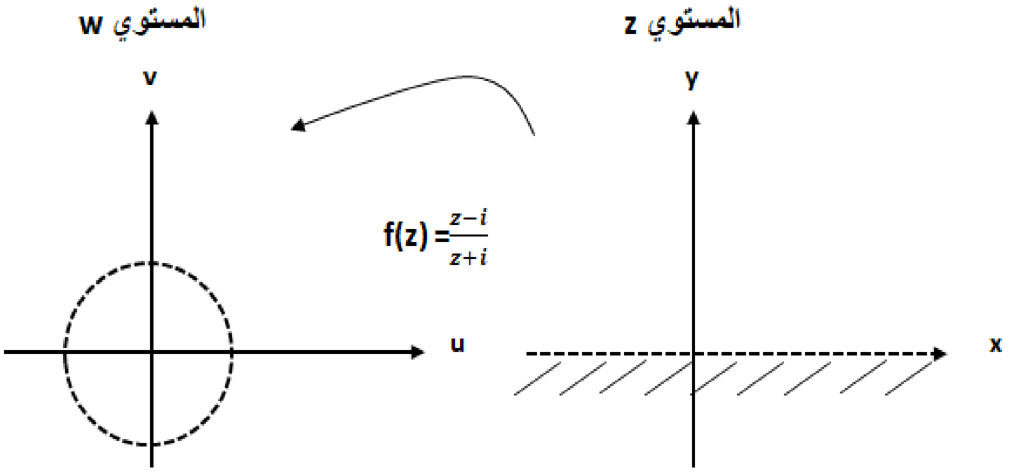
$${u_0}^2 + (-1-v_0)^2 = r^2$$

$$(1-u_0)^2 + {v_0}^2 = r^2$$

وبحل هذا النظام نحصل على $r = 1$ ، $v_0 = 0$ ، $u_0 = 0$ وهذا يعني ان الدائرة المطلوبة هي $|w| = 1$.

بقى علينا فقط معرفة نصف المستوي العلوي بالتحويل المعطي سيحول الى داخل أو خارج هذه الدائرة.

لذلك أختر أي نقطة داخل نصف المستوي العلوي ولتكن $z = i$ وهي أصل النقطه $w = f(i) = 0$ الواقعة داخل الدائرة مما يعني أن التحويل المعطي يحول نصف المستوى العلوي إلي قرص الوحدة $|w| < 1$.



شكل (34.3)

الخاتمة

وهكذا نصل إلى نهاية البحث الذي تناولنا فيه احد اهم المواضيع العلمية التي يقف عندها الطلاب في مراحلهم التعليمية المختلفة وهو الاعداد المركبة بشكل عام والتحويلات بدوال أولية بشكل خاص، وقد اوضحت في هذا البحث ما استطعت من تعاريف ونظريات وأمثلة متنوعة تتناول هذا العلم الواسع.

وأسال الله لي ولكم كل التوفيق والسداد.

التوصيات

بعد الدراسة والبحث في التحويلات بدوال أولية المحددة في هذا البحث أوصي بإكمال مسيرة هذا البحث:

- بإجراء بحث في تحويلات بالدوال الاسية، والدوال اللوغاريتمية، والدوال المثلثية.
- إجراء بحث عن تطبيقات التحويلات الاولية في المستوي المركب.
- التحقق من مدي فهم طلاب الجامعات لموضوع البحث.
- كما أوصي بالاهتمام وإعطاء هذا الموضوع حقه والتأكيد على دراسته في مقررات الجامعة بشكل خاص والمقررات الدراسية في المراحل التعليمية بشكل عام.

المراجع

المراجـــع العربية:

1) د. حيد مجيد.، تحليل الدوال المركبة ، جامعة بغداد، 2019.

2) د.رمضان أحمد جهية، د. سالم القوي، التحليل المركب، دار الكتاب الجديد المتحدة، 2013.

3) د.محمود كتكت، مبادي التحليل الـمركب، دار ومكتبة الهلال بيـروت، دار الشروق جدة للنشر والطباعة.

4) د.مواري شبيحل، نظريات ومسائل في الدوال المركبة مع مقدمة في التناظر الحافظ للزوايا وتطبيقاتة، دار ماكجروهيل للنشر، 1964.

5) د.وليام ر.دريك.، التحليل المركب وتطبيقاته، تـرجمة سعدون إبـراهيم وعثمان أبـوبكر، النشر العلمي والمطابع، جامعة الملك سعود.

المراجــع الاجنبيــة:

1) Churchill, Ruel, and James Brown. Ebook: Complex Variables and Applications. McGraw Hill, 2014.

2) Zill, Dennis G., and Patrick D. Shanahan. Complex analysis: A first course with applications. Jones & Bartlett Publishers, 2013.