دولة ليبيا

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة طرابلس

كلية التربية _ جنزور

قسم الرياضيات

بحث تخرج للحصول على درجة البكالوريوس في الرياضيات

بعنوان:

المتجهات في الماتلاب – VECTORS IN MATLAB

إعداد الطالبة: ألاء رمضان إمبية عكرة

إشراف الدكتور: سعد أحمد أحمد

العام الدراسي: 2024 _ 2025

﴿ بِسمِ اللهِ الرَّحمنِ الرَّحِيم ﴾

﴿ وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ ﴾

---

*سورة يوسف الآية (76)

الإهداء

الي رسول الرحمة والسلام، الذي بعثه الله هادًا ومبشّرًا ونذيرًا للناس أجمعين ، فأنار لنا دروب الحياة وجعل العلم نورًا وهدى محمد صلي الله عليه وسلم .

الي من كان نبرساً وكانت حروفه من ذهب وكلماته من درر وأجلي العبارات في العلم

دكتور سعد أحمد

الي من عرفت باسمه فكانت شهادة نصري الاولي الي من علمني الصمود مهما تبدلت الظروف الي من يرافقني من بعيد

والدي الغالي غفر الله لك

الي جنة الله في الأرض التي استظل في نعيمها ، الي التي احتلت كياني فازدهرت بوجودها بساتين قلبي

امي الغالية ادامك الله في حياتي

الي ابي الثاني الي الذي رحل باكرا من هذه الحياة الي الذي وجوده باقيا في قلبي وعقلي

اخي الغالي غفر الله لك

الي من حبهم يسري في عروقي الي من هم أقرب لي من روحي الي سعادتي الأبدية

اخي _اختي

الي من يحلو بهم الاخاء تميزوا بالوفاء والعطاء الي من تكاتفنا يدا بيد ونحن نقطف زهرة تعلمنا

زميلاتي وصديقاتي

شكر وتقدير

الحمد لله الذي علم الإنسان ما لم يعلم، وبهذا التوفيق الذي منّ الله به علينا، نرفع أسمى آيات الشكر والتقدير لكل من ساهم في إتمام هذا العمل العلمي.

أولاً، أتوجه بأسمى آيات الشكر والامتنان إلى **جامعة طرابلس، كلية التربية _ جنزور**، على إتاحة الفرصة لنا للحصول على هذا التعليم المتميز والدعم المستمر خلال فترة دراستنا. لقد كانت هذه الجامعة هي الصرح العلمي الذي أضاء لنا الطريق، ووفرت لنا بيئة علمية غنية ومحفزة ساعدتنا على تطوير مهاراتنا الأكاديمية والعلمية.

اساتذتي الكرام لا يسعني إلا أن أعبر عن امتناني العميق لكم على الدعم العلمي المستمر، والنصائح القيمة التي قدمتموها لي طوال فترة دراستي. لقد كانت دروسكم مصدرًا للمثابرة والإصرار.

شكراً لكم على صبركم وتوجيهاتكم الدقيقة التي كانت بمثابة دليل لي في رحلة البحث العلمي.

كلماتكم كانت دومًا تشجعنا على التفوق والتميز.

في الختام، أتوجه بالشكر والعرفان الخاص **لعائلتي** الحبيبة، التي كانت دائمًا مصدر قوتي ومرشدي في كل خطوة.

وأخص بالشكر والرحمة لوالدي العزيز الذي فقدته في صغري، ولكنني شعرت بدعمه ووجوده في كل لحظة من هذه الرحلة.

قائمة المحتويات

ب.ف	الموضوع	رقم الصفحة
	الآية القرآنية	ب
	الاهداء	ج
	الشكر والتقدير	د
	قائمة المحتويات	هـ
	قائمة الجداول	و
	قائمة الاشكال	ز
	المقدمة	1
1	الباب الأول: برنامج الماتلاب	3
1-1	الماتلاب وتعريفه	5
2-1	تأسيس ومؤسس برنامج الماتلاب	7
3-1	مميزات واهمية برنامج الماتلاب	8
4-1	أجزاء ومكونات نظام الماتلاب	9
5-1	تنزيل برنامج الماتلاب	10
6-1	رموز برنامج الماتلاب	18
7-1	التعبير الحسابي او العمليات الحسابية لبرنامج الماتلاب	24
2	الباب الثاني: المتجهات والفضاءات المتجهة	28
1-2	تصنيف المتجهات	30
2-2	تعريف المتجه وانواعه	31_30
3-2	ضرب المتجهات	32
4-2	تعريف فضاء المتجهي	34
5-2	الفضاءات الجزئية	39
3	الباب الثالث: الماتلاب والمتجهات	41
1-3	ننشئ متجه في الماتلاب	43
2-3	العمليات على المتجهات:	56
2-2-3	إضافة عنصر جديد في متجه	56

3-2-3	إيجاد العنصر الأكبر والاصغر في متجه	57
4-2-3	المقارنة بين متغيرات المتجه	58
5-2-3	دمج متجهين في متجه	60
6-2-3	مقياس المتجه	61
7-2-3	ضرب المتجهات	63
8-2-3	حذف عنصر او عدة عناصر في متجه	64
9-2-3	المتوسط الحسابي للمتجهات	66
10-2-3	القيمة المتوسطة للمتجهات	66
11-2-3	المضروب للمتجهات	67
	المراجع	I
	الخاتمة	II

قائمة الجداول

ب . ر	الموضوع	رقم الصفحة
1-1	معلومات تقنية عن الماتلاب	6
2-1	الدوال التقريبية الدوال الحسابية	20
3-1	الدوال المثلثية	21
4-1	الدوال الحسابية الأولية	22
5-1	معاملات المقارنة	23
6-1	معاملات منطقية	23
7-1	العمليات الحسابية البسيطة	24
8-1	أسبقية المعاملات	25

قائمة الأشكال

ب. ر	الموضوع	رقم الصفحة
1-1	شاشة البرنامج	11
2-1	نافذة البرنامج الرئيسية	11
3-1	القائمة لاختيار أوامر تنفيذ مقطع	14
4-1 5-1	نافذة الملف المخزن	15
6-1	تنفيذ المف المخزن	15
7-1	حفظ ملف للتخزين	16
8-1	حفظ دالة بسيطة	17
1-2	مقدار المتجه	31

المقدمة

الفضاءات المتجهة هي أحد المواضيع الأساسية في علم الرياضيات، خصوصًا في الجبر الخطي.
في هذا السياق، يُعتبر الفضاء المتجهي مجموعة من المتجهات، التي يمكن جمعها معًا أو ضربها في عدد حقيقي (أو معقد) وفقًا لمجموعة من القواعد المحددة. هذه الفضاءات تُستخدم في العديد من التطبيقات الرياضية والهندسية والعلمية، مثل تحليل الأنظمة الخطية، التمثيل الهندسي، والتحويلات الرياضية.

الفضاءات المتجهة في الرياضيات:

في الرياضيات، يشير مفهوم "الفضاء المتجهي" إلى مجموعة من المتجهات التي تتسم بخصائص معينة مثل:

1. الخاصية التبادلية: يمكن جمع المتجهات في أي ترتيب.
2. وجود العنصر المحايد: يوجد متجه "صفر" لا يؤثر عند إضافته إلى أي متجه آخر.
3. الوجود العكسي: لكل متجه في الفضاء المتجهي يوجد متجه معكوس له.
4. التمثيل الخطي: يمكن ضرب المتجهات في أعداد حقيقية (أو معقدة) مما يؤدي إلى التوسع في الفضاء المتجهي.

تُستخدم هذه الفضاءات في العديد من فروع الرياضيات مثل الجبر الخطي، نظرية المصفوفات، تحليل الإشارات، والعديد من التطبيقات الهندسية والعلمية.

علاقة الفضاءات المتجهة بالتكنولوجيا:

تعتبر الفضاءات المتجهة أساسًا في العديد من المجالات التكنولوجية مثل:

• الرؤية الحاسوبية: حيث تُستخدم الفضاءات المتجهة لتمثيل الصور والأجسام في الفضاء ثلاثي الأبعاد، وكذلك في تقنيات التحويل بين الإحداثيات مثل تحويلات الكاميرا.

• الذكاء الاصطناعي والتعلم الآلي: تُستخدم الفضاءات المتجهة لتمثيل البيانات مثل تمثيل الكلمات في الفضاءات المتجهة (word embeddings) أو تمثيل المميزات (features) في الخوارزميات مثل الشبكات العصبية.

يهدف هذا المشروع إلى تقديم شرح شامل لبرنامج الماتلاب واستخداماته في مجال الحسابات الرياضية والهندسية.

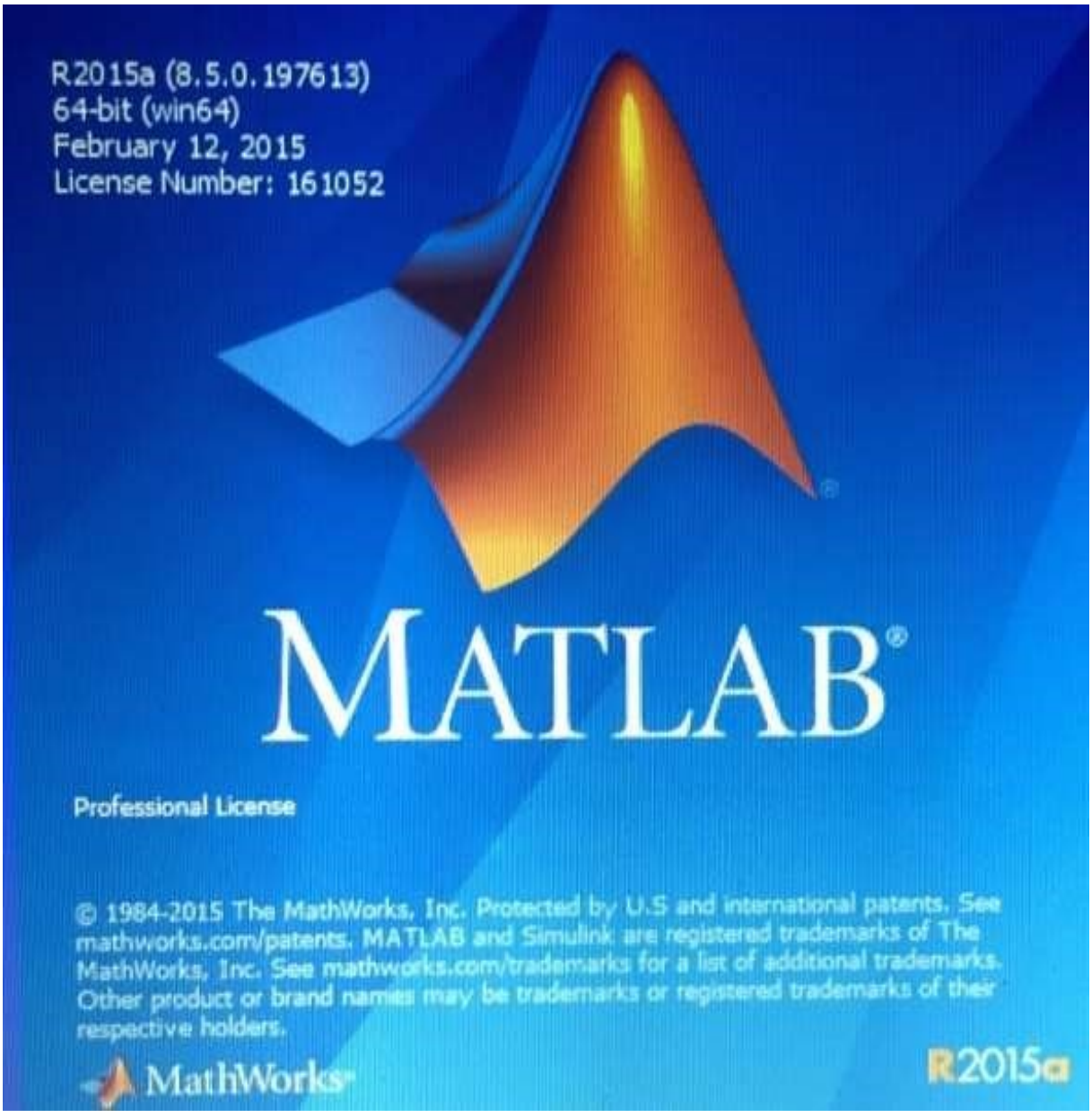
في الباب الأول، سنتعرف على تعريف الماتلاب، تاريخه وتأسيسه، بالإضافة إلى المميزات والخصائص التي تجعله أداة قوية وفعالة. كما سنتناول مكونات البرنامج المختلفة وكيفية تنزيله واستخدامه، مع التركيز على رموز لغة البرمجة والدوال المتاحة لتنفيذ العمليات الحسابية المعقدة.

أما في الباب الثاني، فسوف نتناول موضوع المتجهات، حيث نبدأ بتعريفها وأنواعها، بالإضافة إلى العمليات الأساسية مثل ضرب المتجهات وتعريف الفضاء المتجهي والفضاءات الجزئية.

في الباب الثالث، سنركز على تطبيقات المتجهات داخل بيئة الماتلاب. سنتعرف على كيفية إنشاء المتجهات وتنفيذ العمليات المختلفة عليها، مثل إضافة العناصر الجديدة، إيجاد العناصر الأكبر والأصغر، وغيرها من العمليات الهامة التي تسهم في التعامل مع البيانات داخل البرنامج

«الفصل الأول»

برنامج الماتلاب



محتويات الباب الأول

1-1 الماتلاب وتعريفه

2-1 تأسيس ومؤسس الماتلاب

3-1 مميزات واهمية برنامج الماتلاب

4-1 اجزاء ومكونات نظام الماتلاب

5-1 تنزيل الماتلاب

6-1 رموز اللغة والدوال لبرنامج الماتلاب

7-1 التعبير الحسابي والعمليات الحسابية لبرنامج الماتلاب

(1-1) الماتلاب:

جاءت كلمة الماتلاب " mat lab " من الاحرف الاولي لعبارة مختبر المصفوفات "Matrix laboratory"

بحيث تتعامل لغة الماتلاب مع ثوابت والمتحولات كمصفوفة رياضية وبناء على تلك العمليات الرياضية الافتراضية في الماتلاب هي عمليات على المصفوفات مثلا

: A * B

_ وهي عملية ضرب المصفوفتين الأولي (A) والثانية (B).

نرى ان البرنامج المكتوب بلغة الماتلاب سيكون موجزا أكثر مما لو كان مكتوب بلغة برمجة أخرى. والماتلاب برنامج حاسوبي من انتاج شركة (math works) يستطيع ان يساعدك في حل انواع مختلفة من المسائل الرياضية سواء في دراسته أو في مجال عملك الهندسي أو التقني.

ويعتبر الماتلاب احد اهم البرامج التي تتيح بيئة برمجية عالية المستوى بإضافة لبيئة المحاكاة للأنظمة الهندسية المختلفة و قد تم مؤخرا تطوير كمية كبيرة من الادوات في هذا البرنامج ، حيث يقوم بعمليات التحليل و تمثيل البيانات التي تمت اضافتها من خلال معالجة تلك البيانات تبعا لقاعدة بيانات الخاصة به فمثلا يستطيع عمل التفاضل (differentiation) والتكامل (integration) وكذلك المعادلات الجبرية (algebraic equation) وكذلك المعادلات التفاضلية (differential equations) لدالتين قد تصل من الصعوبة ما تصل ليست بسهولة ويسر و التي تستلزم وقتا كبيرا لعملها بالطرق التقليدية هذا من الناحية الأكاديمية اما من الناحية التطبيقية فهناك العديد منها في المجالات المختلفة مثلا جميع المجالات الهندسية مثل نظم التحكم (control systems) وصناعة السيارات (automotive industry) ومجال الطيران والدفاع الجوي (aerospace and defense) .

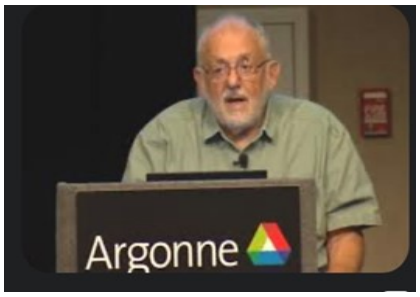
(1.1.1) تعريف الماتلاب: هو بيئة برمجة وحوسبة رقمية تستخدم لتحليل البيانات وتصميم الخوارزميات وهو ايضاً برنامج فعال للغاية في اجراء العمليات الحسابية والهندسية، كما انه وسيلة ممتازة لمعالجة الجبر الخطي.

لغة البرمجة	C , ++ c ، فورتران , جافا
الإصدار الأول	1984
الإصدار الأخير	R 2023b 23/8/2023
الرخصة	رخصة احتكارية
موقع الويب	Math work.com
نظام التشغيل	مايكروسفت ويندوز، ماك، أس، لينكس

معلومات تقنية عن الماتلاب (الجدول 1 –1)

هذه المعلومات التقنية تشمل لغات البرمجة التي يتعرف عليها الماتلاب واول اصدار له واخر اصدار له وكيفية ايجاده على الشبكة العنكبوتية ونظام التشغيل الذي يعمل تحت بيئته ولاحقا سوف نشرح مفصلا كل ما ذكر بالجدول.

(1-2) تأسيس ومؤسس الماتلاب:



- **كليف مولر:** هو استاذ رياضيات وعلوم حاسب في جامعات امريكية منها جامعة لا كتيز منذ عشرين عاما وأيضا جامعة ميشيغان وجامعة ستانفورد وجامعة نيومكسيكو ; في عام 1970 قام كليف وزملائه بتطوير مكتبات الفورتران والتي كانت تدعى linpack و eispask تحت منحة من المؤسسة القومية للعلوم وهما اللبنة البرمجية الاساسية في برمجيات حسابات المصفوفة.

  بداء كليف بكتابة البرنامج والوصول اليه من linpack و eispask بكل بساطة وسمى برنامجه ب" matlab " ثم انتشر الماتلاب للجامعات الأخرى ووجد جمهور قوى من قبل المتخصصين في مجال الرياضيات والهندسة، وفي عام 1983 عرض علي المهندس جاك ليثل برنامج الماتلاب من قبل كليف.

- **جاك ليثل :** هو مؤسس شركة "math works" كما انه المساعد في وضع تخطيط برنامج الماتلاب وهو حاصل على بكالوريوس الهندسة الكهربائية وعلوم الحاسب من جامعة "mtt" عام 1978.

بعد ان عرض كليف البرنامج على جاك أنظم اليه وأعيدت كتابة الماتلاب بلغة سي وفي عام 1984 أسست شركة "math works" لمواصلة تطوير الأوامر وفي كل مرة يتم التجديد من العلماء ليكون له اصدار بالسنة والاسم ويكون هذا الاصدار مناسبا للتطور التقني واجهزة الحاسوب.

(1-3) مميزات برنامج الماتلاب.

1- جمع الحسابات بدقة بالغة والوصول الي أفضل نتائج.

2- الاوامر والبرامج الفرعية المتعددة والتي تساعد في تسهيل كثير من الحسابات .

3- الاشكال البيانية والمنحنيات والرسم في بعدين او ثلاث ابعاد وذلك باستخدام أوامر الرسم الموجودة به.

4- علمنا ان للماتلاب لغات برمجة او هو لغة برمجة ايضا ومن أفضل ميزاته هو امكانية الحفظ داخل ملفات والرجوع اليه في وقت لاحق.

(1.3.1) اهمية دراسة الماتلاب وتطبيق المقررات الدراسية عليه:

1_ رفع مستوي التحصيل العلمي والتقني لدي الطلاب والمعلمين وتنمية القدرات الرياضية وتطبيقها .

2_ جذب الطلاب الي تطبيق المقرر الدراسي وتثبيت المعلومات وفهمها بشكل اوضح.

3_ تساعد المعلمين والباحثين في الحصول علي نتائج دقيقة وبسرعة عالية.

4_ امكانية الرسم بالشكل البياني وبصورة دقيقة ومفصلة وبسرعة عالية.

كما علمنا سابقاً أن البرنامج الماتلاب صمم أساسًا للتعامل مع العمليات على المصفوفات بشكل بسيط. أرفقت بهده اللغة أدوات لمعالجة وحل تطبيقات علمية خاصية تسمى Toolbox (وهي أكثر من عشرين أداة) حيث تسمح هذه الأدوات بتعلم وتطبيق تقنيات حل متخصصة لمعالجة مشكلات ومسائل خاصة، مثل معالجة الإشارات ونظم التحكم والمحاكاة والتحليل العددي والكمي والمالي والإحصائي ومسائل الجبر الخطي ... إلخ.

(1-4) مكونات نظام الماتلاب:

يتكون نظام الماتلاب من خمسة أجزاء رئيسية:

1- لغة عمل الماتلاب: هذه لغة ذات مستوى عالي التعامل مع المصفوفات ذات البعد الواحد وذات البعدين مع جمل تتماشي مع التحكم الوظيفي، تركيب البيانات، الإدخال المصفوفات و الاخراج، والهدف الوجيه للمزايا البرمجية.

2- بيئة عمل الماتلاب: هذه مجموعة من الوسائل والتسهيلات التي تعمل معها مثل مستخدمي الماتلاب او المبرمجين والتي تشمل تسهيلات للأدارة ومتغيرات في مساحة العمل وارسال واستلام البيانات وتطبيقات الماتلاب، والإدارة العامة.

3- التعامل مع الرسومات: هذا النظام للتعامل مع الرسومات يتضمن اوامر ذات مستوى عالي للبيانات ذات البعدين وثلاث ابعاد، التصوير، الرسومات، معالجة الصور، تقديم الرسومات.

4_ مكتبة الماتلاب للوظائف الرياضية: هي مجموعة واسعة من حلقات التحليل اللوغاريتمي من الدوال الابتدائية مثل:

. "Sum, sin, cos, coplexarithmetic"

5_ امكانية ربط الماتلاب مع لغات البرمجة مثل: سي، جافا ... .

(1-5) تنزيل برنامج الماتلاب:

سجل الدخول الي الحساب "math works الخاص بك علي: "

https://www.mathworks.com

ثم انتقل الي:

https://www.mathworks.com/downlods

حدد اصدار الماتلاب الذي تريد تثبيته.

في بعض الاحيان قد يؤدي برنامج مكافحة الفيروسات الي منع البرنامج

من تثبيت المنتج" Math work" .

قد تحتاج الي اضافة استثناء البرنامج لتثبيته في الاعدادات البرنامج لمكافحة الفيروسات لدينا لضمان انه لا توجد مشاكل اثناء التنزيل.

(1.5.1) تشغيل برنامج الماتلاب:

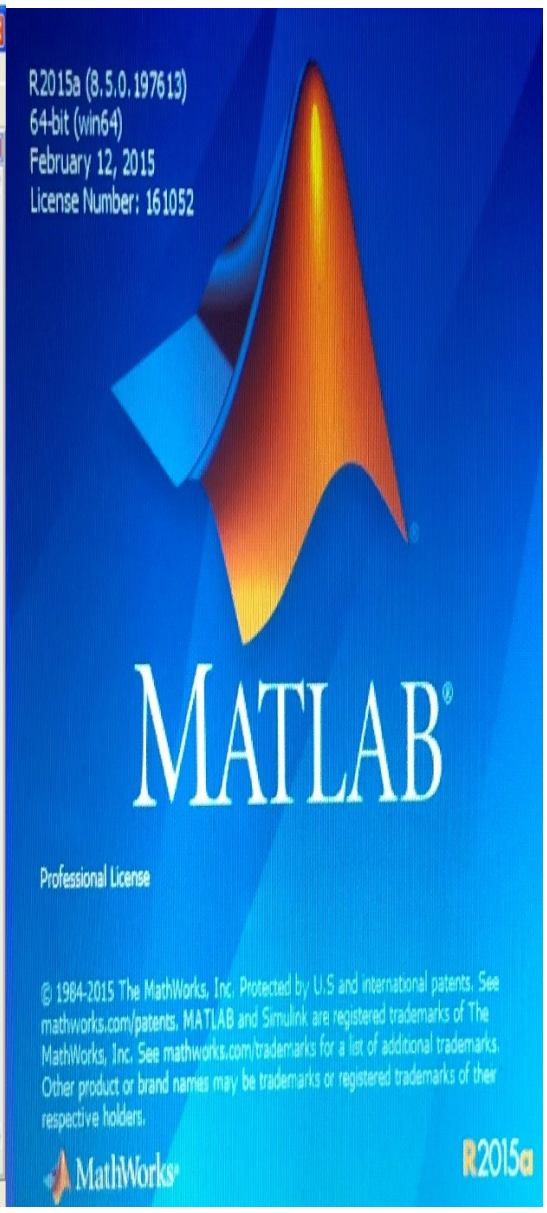
يتم تشغيل البرنامج بأحدي الطرق التالية:

1 _ بعد تنزيل برنامج الماتلاب على الحاسب سوف تضاف أيقونة البرنامج على سطح المكتب ويحمل الاسم والاصدار

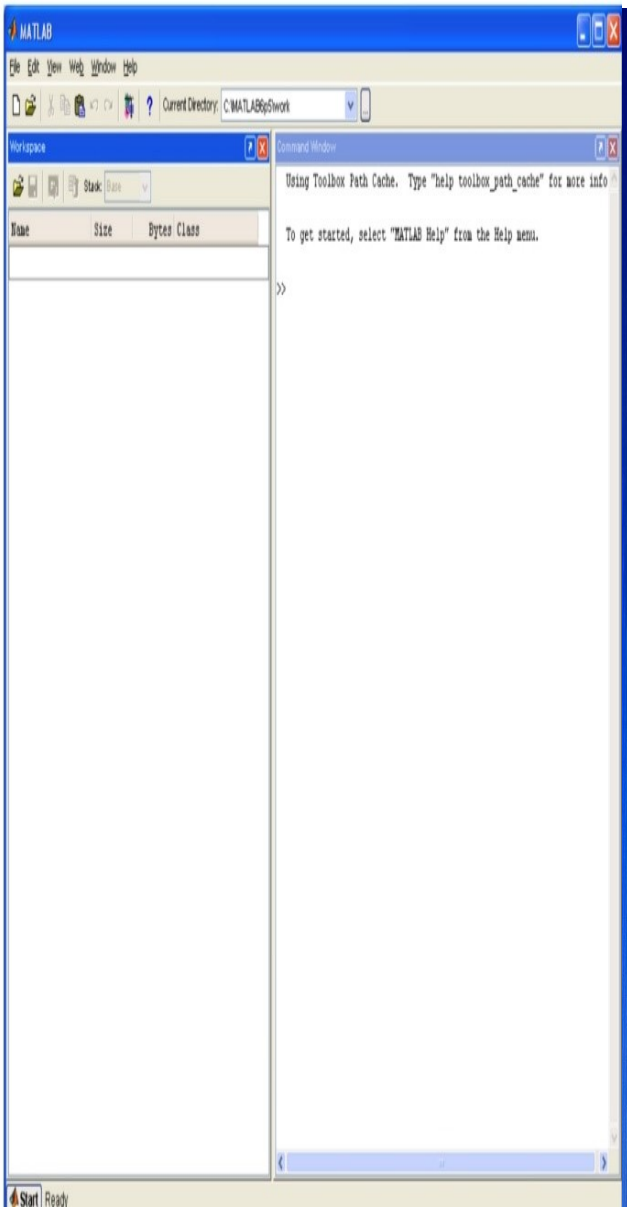
ويتم فتحه بنقر المزدوج على الأيقونة.

2 _ أو عن طريق الذهاب الي قائمة " start " ومنها الي " programs " كافة البرامج ثم أسم برنامج الماتلاب.

عندها سوف تظهر لنا شاشة تحمل اسم البرنامج ونسخة الاصدار وسنة النشر كما في الشكل (1_1) بعد ثواني سوف تظهر نافذة البرنامج الرئيسية والتي تكون في نظام التشغيل كما في الشكل (2_1) حيث تحتوي هذه النافذة التي تعمل تحت بيئة نظام windows على نوافذ فرعية وسوف نشرح وظيفتهم.



الشكل 1-1



الشكل 1-2

(2.5.1) مكونات النافذة لبرنامج الماتلاب:

_ تتكون نافذة الماتلاب من:

* **_ شريط العنوان:** ويكون ذا لون مميز عن باقي الأشرطة يوجد على يساره الرمز الصوري للبرنامج واسم البرنامج.

***_ شريط القوائم:** يبداء هذا الشريط بالملف الي قائمة المساعدة (... help،file).

***_ شريط الأدوات:** ويضم رموز الصورية لبعض الأوامر في قوائم الشريط السابق.

*_ هناك شريط مهام خاص بالماتلاب وفيه كلمتان الأولى **start** عملها هو تنفيذ الأوامر باختصار بينما **ready** تعلمك بأن البرنامج جاهز للعمل حسب التوجيه المعطى له.

***_View :** هي قائمة النوافذ الداخلية الظاهرة أسمائها وتعرف ايضاً بواجهة البرنامج، وهى من مكونات نافذة الماتلاب ولكل منها وظيفة.

(3.5.1) مكونات واجهة برنامج الماتلاب من:

1_ نافذة التعليمات command window: هي النافذة الرئيسية لتنفيذ الأوامر التي يتم إدخالها من قبل المستخدم وتكتب بعد علامة **(<<)**.

2_ نافذة الدليل الحالي current directory: وهي ايضا واجهة رسومية تحدد الدليل الحاوي للملف الذي يتعامل معه برنامج الماتلاب.

3_ مجال العمل workspace: في هذا المجال يتم تسجيل أسماء المتغيرات وتحميلها بلغة الماتلاب حيث تظهر قائمة باسم المتغير وحجمه وعدد بياناته وهذا المجال يجنبنا إعادة إسناد القيمة نفسها للمتغير واستعماله مباشرة في المعادلات أو غير ذلك وعندما يغلق البرنامج يتم حذف محتويات المجال لذلك ينبغي تسجيلها عند الحاجة.

اي يعرض لنا أسماء المتغيرات مثل (Z ، Y ، X) وقيمها وانواعها.

4_نافذة المساعدة help: وهي نافذة تخاطبيه (رسومية) تسمح بالبحث واستعراض الوثائق بشكل مباشر.

5_ لوحة البرامج التنفيذية launch pad: وهي نافذة تستعرض بنية متصلة بالأدوات والبرامج التنفيذية.

ملاحظات:

Work space يتضمن أمر " clear " يستخدم لحذف المتغيرات والدوال من الذاكرة.

Work space يتضمن أمر " clc " يستخدم لمسح نافذة الأمر command window .

يمكن اظهار النتائج العددية في لغة الماتلاب بتنسيقات إظهار مختلفة علي حسب المستخدم:

Format short, long, short e, long e … .

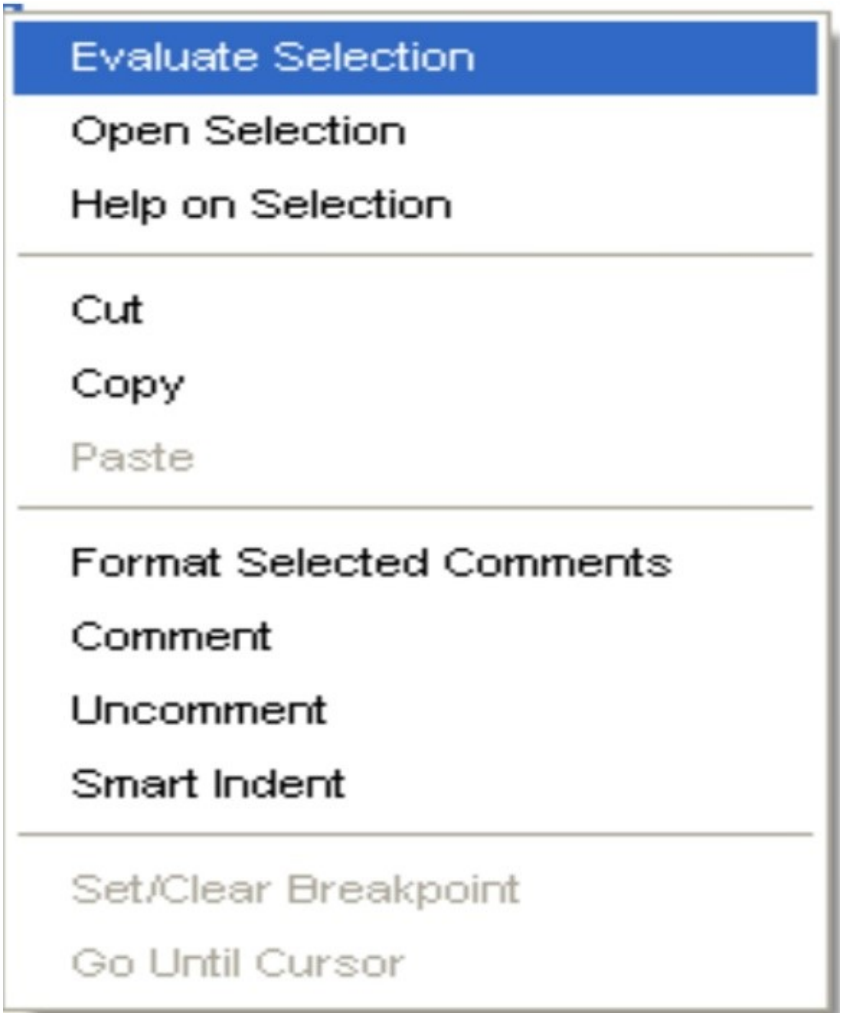
ثلاث نقاط متتالية (...) قبلها فراغ في نهاية السطر دلالة على استمرار الأمر في السطر التالي.

إشارة النسبة المئوية (%) تستخدم للتعليق في كل نصّ:

%This program command Area.

نتيجة تنفيذ برنامج الماتلاب تظهر في الشاشة command لذلك يجب الانتقال اليها بعد التنفيذ.

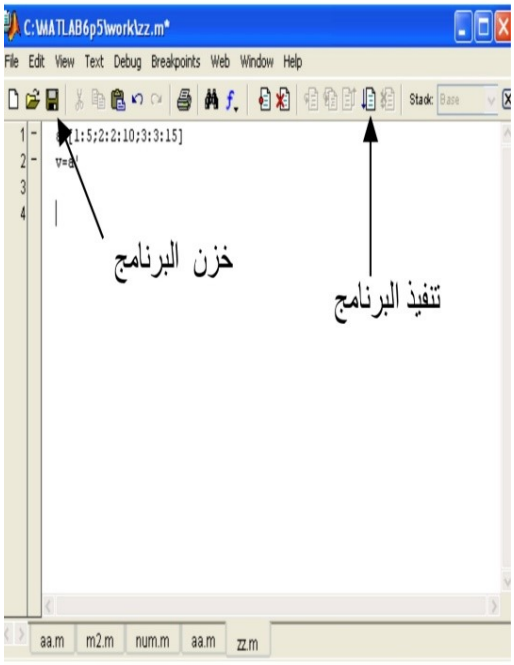
لتنفيذ مقطع من البرنامج يتم تأشيرها ثُم النقر أيمن فتظهر القائمة المنسدلة:



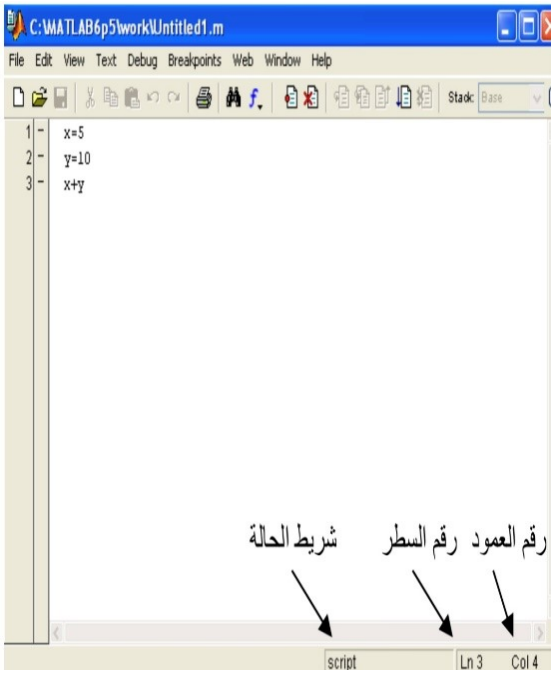
الشكل 1-3

وبعد ذلك نختار copy وننتقل الي command window ونختار paste .

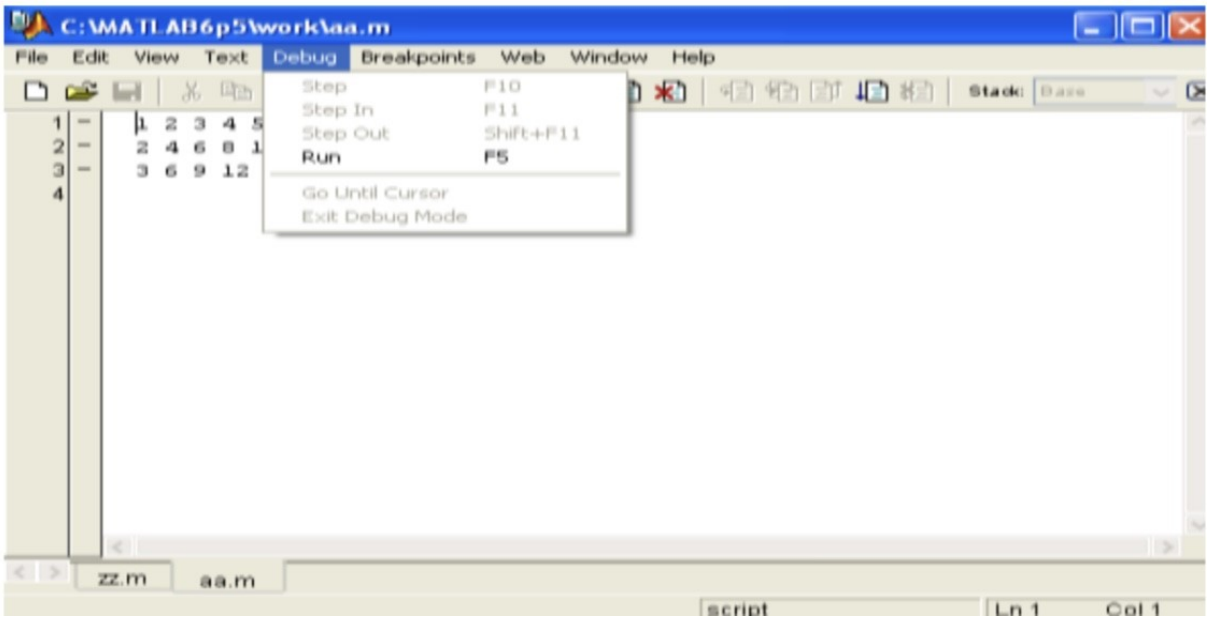
(4.5.1) إنشاء ملف نصي M _ file: لإنشاء ملف نصي أنقر على ايقونة الصفحة الفارغة " البيضاء " الموجودة ضمن شريط أدوات سطح مكتب Mat lab ، أو اختر new من القائمة M _ file أو اختيار open لفتح ملف موجود سابقاً ; يستدعي هذه الأوامر التي تمكنك من كتابة أوامر Mat lab كما في الشكل 1_4 ، 1_5، 1_6:



الشكل 1-4

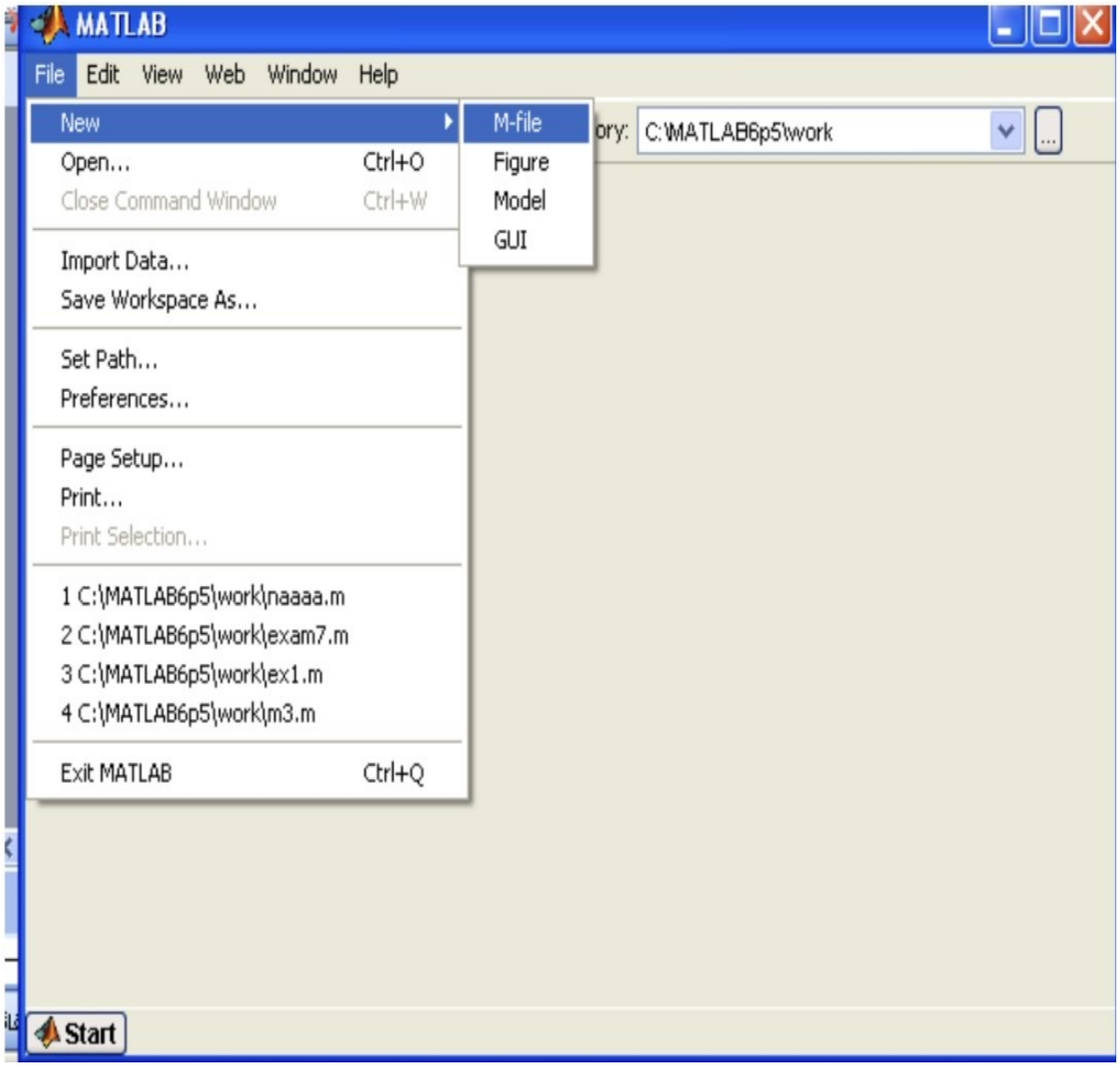


الشكل 1-5



الشكل 1-6

يمكن تنفيذ الملف المخزن باختيار أيقونة Run الموجودة في شريط الأدوات للنافذة Editor أو عبر ضغط المفتاح f5 او الاختيار Run من قائمة Debug، او استدراج الاسم المخزن مسبقاً أمام علامة الحث **(>>)** في نافذة command ; بعد الانتهاء من كتابة البرنامج (الملف) يخزن الملف كملف M _ File باسم معين (example 1.m) علي قرصك الصلب عبر اختيار save من قائمة file او المخزن ضمن شريط أدوات سطح المكتب (mat lab) كما في الشكل :



الشكل 1-7

لإغلاق برنامج MATLAB عبر اختيار Exit MATLAB من القائمة file الموجودة في نافذة سطح مكتب MATLAB او عبر الأمر Exit في نافذة Command، او علامة (x) في زاوية سطح المكتب العليا من جهة اليمين.

تظهر رسالة الخطأ متضمنة رقم السطر ونوع الخطأ ((باللون الأحمر)).

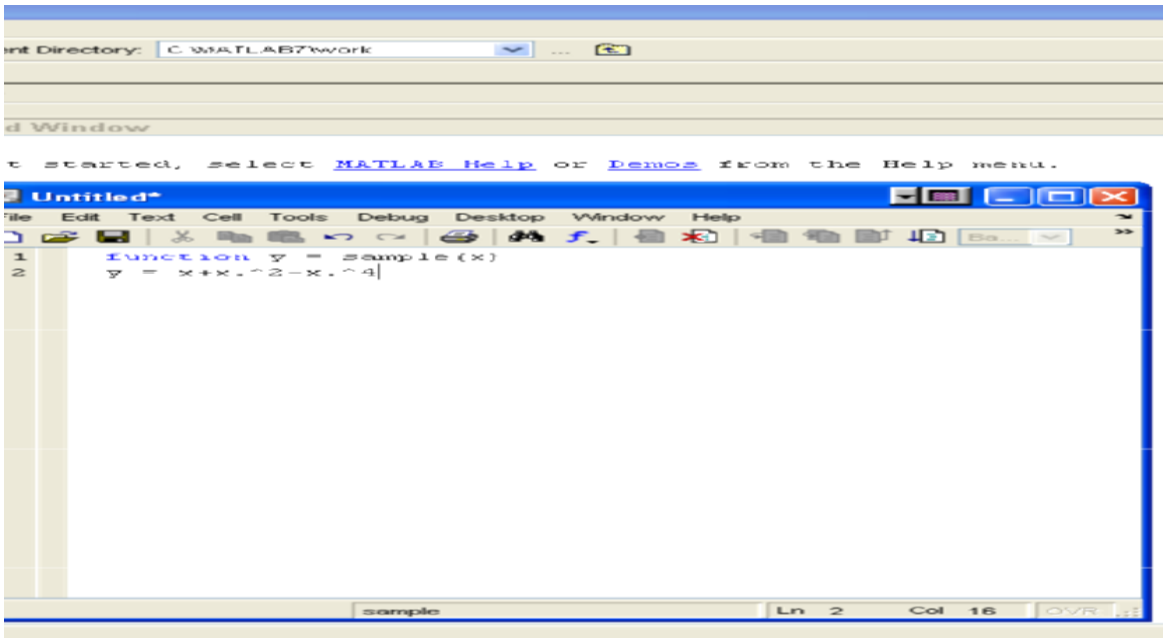
أي متغير غير مستخدم ويدخل في العمليات فإن البرنامج سوف يعطي خطأ.

ومن شروط الحفظ أيضاً هي تعريف الدالة في أول سطر مع مراعاة أن يكون اسم الدالة مكون من مقطع واحد ولا يُفصل بينه مسافات ولا يتجاوز اسم الدالة 31 حرف وأيضاً من شروطها أن تبدأ بحرف ويمكن اتباعه برمز.

مثال (1.5.1) : لحفظ دالة بسيطة :m.file

نفتح new m_file ثُم نقوم بكتابة البرنامج التالي:

```
Function = sample (X)

Y = x+x.^4
```



الشكل 1-8

(1-6) رموز لغة الماتلاب MATLAB Symbols:

تدعم لغة الماتلاب أنواعا متعددة من الثوابت واهمها:

1_ ثوابت عددية numerical constants وتنقسم إلى:

A _ الثوابت الصحيحة مثل: 0، −10، 5067، +87... .

وأكبر عدد يمكن تمثيله بدقة في لغة الماتلاب باستخدام نوع دقة مزدوجة (9.007×10^{15}) وتكتب :

```
≫ bitmax

ans =9.0071992547409 91e+015
```

والتي تقابل $2^{53}-1$

B_ الثوابت الحقيقة : وهنا للغة الماتلاب أكبر وأصغر قيمة حقيقة بإضافة إلى القيمة الرياضية **π**:

```
≫ realmin

ans =

        2.2251e-308

≫ realmax

ans =

        1.79769134862316e+308

≫ pi

  ans =

        3.1416
```

C_الثوابت الحقيقة المدونة تدويناً يائياً " حرفيَا " : حيث في هذا الصنف تتحول الصيغة الجبرية 10^N صيغة MATLAB EN فمثلاً تصبح 8.0×10^7 في الجبر : 8.0E7 أو 8.0E+7 بالتدوين اليائي في MATLAB وكذلك تصبح1.5×10^3 في الجبر : 1.5 E3 .

D_الثوابت العقدية " المركبة " :

Sqrt (−2) , 9 + sin (0.5) *j , 2 + 9i , 7 − 1i .

* علماً بأن $i = j = \sqrt{-1}$.

مثال (1.6.1) : اوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي عندما:

a = −7.2998−6.9369i

الحل

فلاستخراج الجزء الحقيقي نقوم ب : >> a=−7.2998−6.9369i

a =

−7.2998 − 6.9369i

>> c =real (a)

cr =

7.2998−

ولإستخراج الجزء التخيلي نقوم ب: >> ci =imag (a)

ci =

6.9369−

E_الثوابت المنطقية : هذا النوع من الثوابت يعطي القيمة العددية (1) في حالة true و(0) في حالة false .

مثال (2.6.1):

```
≫ 7>1
ans =
     1
```

حيث (1) تدل علي الاجابة الصحيحة

```
≫36<5
ans =
     0
```

حيث (0) تدل علي الإجابة الخطأ

(2.6.1) الدوال المخزنة بالبرنامج: هي دوال معدة بواسطة الشركة المنتجة للبرنامج ويمكننا لذلك، وهنالك الكثير منها مخزنة وتبين الجداول التالية codeاستخدامها مباشرة دون الحاجة الي بعضها:

(a) الدوال التقريبية:

الدالة	الوظيفة
Rem	نقوم بإخراج الباقي الصحيح لعملية القسمة
Floor	تقريب العدد العشري الي (-∞)
Celi	تقريب العدد العشري الي (∞)
Fix	ايجاد القيمة العددية في صورة عدد صحيح
Round	تقريب العدد العشري باتجاه أقرب عدد صحيح

الجدول 1-2

(b) الدوال المثلثية:

الدالة	الوظيفة
Sin	لحساب جيب الزاوية
Cos	الزاوية لحساب جيب تمام
Tan	الزاوية لحساب ظل
Cot	الزاوية لحساب ظل تمام
Sec	دالة sec (x)
Csc	دالة csc (x)
A sin	لمعرفة قيمة الزاوية بالتقدير الدائري ، جيب الزاوية
A cos	لمعرفة قيمة الزاوية بالتقدير الدائري ، جيب تمام الزاوية
A tan	لمعرفة قيمة الزاوية بالتقدير الدائري ، ظل الزاوية
A cot	لمعرفة قيمة الزاوية بالتقدير الدائري ، ظل تمام الزاوية
A csc	معكوس csc
A sec	معكوس sec
Sinh	دالة زائديه sin
Cosh	دالة زائديه cos
A sinh	معكوس sin
A cosh	معكوس cos

الجدول 1-3

(c) الدوال الحسابية الأولية:

الدالة	الوظيفة
Exp	e^x
Sqrt	لإيجاد قيمة الجذر التربيعي
Abs	لإيجاد القيمة المطلقة
Gcd	القاسم المشترك الأعظم
Lcm	القاسم المشترك الأصغر
Max	لإيجاد القيمة العظمى
Min	لإيجاد القيمة الصغرى
Mod	القيمة المطلقة للباقي الصحيح للقسمة
Rem	لحساب الباقي الصحيح للقسمة
Log	e = اللوغاريتم الطبيعي والقيمة العددية 2.7183
Log 10	اللوغاريتم ذو الأساس العشري 10
Log 2	اللوغاريتم ذو الاساس 2
Factorial	لحساب المضروب
Complex	تكوين اعداد مركبة من أعداد حقيقة وتخيلية
Conj	لمعرفة المرافق للعدد التخيلي
Imag	لإيجاد الجزء التخيلي من العدد المركب
Real	لإيجاد الجزء الحقيقي من العدد المركب

الجدول 1-4

(3.6.1) معاملات المقارنة:

هي كل الإشارات في هذا الجدول للمقارنة أثناء استخدامها بين مصفوفتين لها نفس الحجم، او المقارنة بين مصفوفة وعدد مفرد وتتم هذه في مقارنة كل عنصر من المصفوفة مع عدد مفرد وتكون المصفوفة الناتجة نفس حجم المقارنة التي تمت.

معامل المقارنة	الوظيفة
<	**أصغر من**
<=	**أصغر من أو يساوى**
>	**أكبر من**
>=	**أكبر من أو يساوي**
==	**إشارة المساواة " لتميزها عن = "**
~=	**إشارة عدم المساواة**

الجدول 1-5

وهناك ايضاً معاملات منطقية ومن خلالها نستطيع الدمج أو نفي تعابير المقارنة التي يتعرف عليها الماتلاب .

المعامل المنطقي	الوظيفة
&	**" و " And**
|	**" أو " Or**
~	**" النفي " Not**

الجدول 1-6

(1-7) التعبير الحسابي أو العمليات الحسابية البسيطة لبرنامج الماتلاب :

يتكون التعبير الحسابي من عدد من الثوابت والمتغيرات تجمع بينهما عمليات حسابية ولتوضح هذه العمليات قمنا بإنشاء هذا الجدول يوضح العملية الحسابية ورمزها ومثال توضيحي عليها:

العملية	الرمز	التعبير الجبري	التعبير بلغة الماتلاب
الجمع	+	a+8	**a+8**
الطرح	-	9-c	**9-c**
الضرب	*	5b	**5*b**
القسمة	/	63/7	**63/7**
ألاس	^	C^3+2	**C^3+2**

الجدول 1-7

عرفنا سابقا أن برنامج الماتلاب يقوم بالعديد من العمليات الحسابية وإيجاد قيم البيانات التي تم إدخالها بواسطة خطوات سابقاً، تسير العمليات الرياضية علي أساس مجموعة من القواعد الناظمة لأسبقية الدُنيا

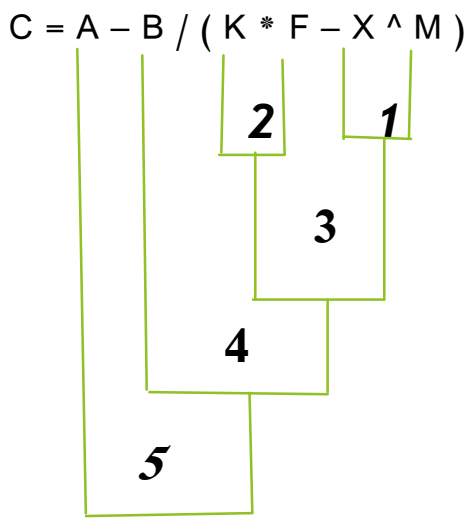
، وتقيم المعاملات ذات الأسبقية العليا قبل المعاملات ذات الأسبقية المتساوية ترتيباً من اليسار إلى اليمين ولتمييز والتعرف على العمليات الحسابية أو ما يسمى (أسبقية المعامل) عن طريق الجدول:

المعامل	مستوى الأسبقية
الأقواس ( )	
المدود (') ، القوة (^ ، ^.)	
إشارة النفي (~)	
الضرب (* ، *.) ، القسمة (/ ، /.)	
الجمع (+) ، والطرح (–)	
معامل النقطتين المتعامدتين الشارحة (:)	
أصغر من (<) وأكبر من (>)، **وأصغر من او يساوي وأكبر من او يساوي**	
الجمع المنطقي & and	
المعامل المنطقي | or	

الجدول 1-8

ولتوضيح هذا الجدول سوف نضع مثال بسيط يوضح هذه العمليات ومستوى الأسبقية.

مثال(1.7.1):



نرى هنا أن 1 هي رفع ألاس لتصبح قيمة واحدة
أما رقم 2 نقوم بضرب القيمتين وطرح كل من
القيمتين الناتجتين من 1 و2 وتسمى 3.
أما الخطوة 4 هي حاصل قسمة B على الحاصل من
1 و2 على 3 نحصل على القيمة 4.
بعد الحصول على 4 نقوم بالطرح A على ناتج هو 4
ونحصل على النتيجة الكمية الكلية لهذه العملية
عند التعويض بالقيم

المعطيات :

A = 3 , F = 12 , B = 9 , X = 3 , K = 1 , M = 2 , C =?

أي $C=3-9/(1*12-3^2)$

الحل

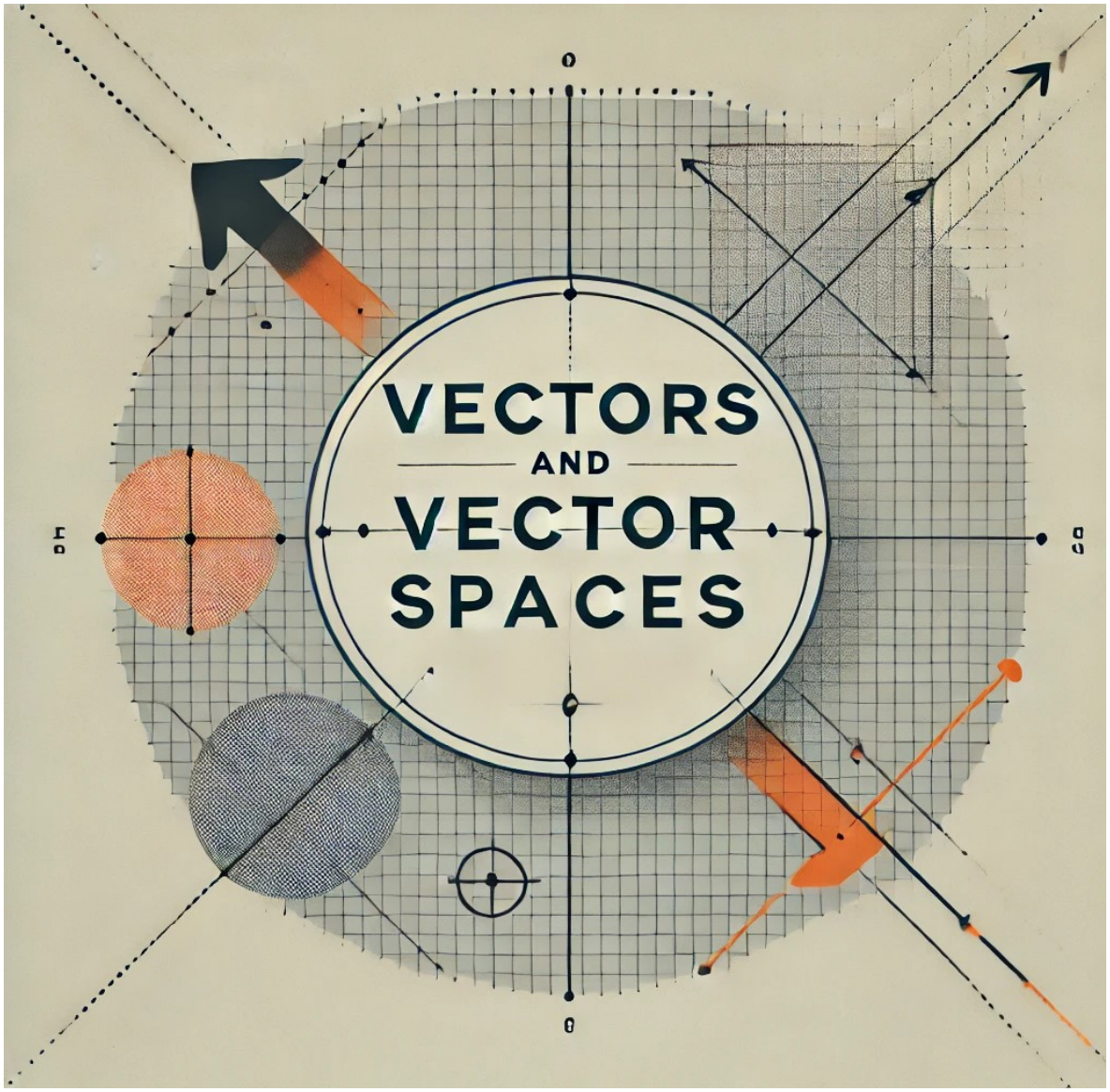
* وعند تطبيق هذا في برنامج الماتلاب تكون الخطوات كما يلي:

```
>> a=3

a =

3

>> b=9
```

```
b =

     9

>> k=1

k =

     1

>> f=12

f =

    12

>> x=3

x =

     3

>> m=2

m =

     2

>> c=3-9/ (1*12-3^2)

c =

0
```

«الباب الثاني»

المتجهات والفضاءات المتجهة



محتويات الباب الثاني

2-1 تصنيف المتجهات

2-2 تعريف المتجه وانواعه

2-3 ضرب المتجهات

2-4 تعريف فضاء المتجهي

2-5 الفضاءات الجزئية

المقدمة :

يكتسب علم الرياضيات جاذبية خاصَة لدي العاملين في مجال البحث العلمي وخاصَة بعد التطور الهائل الذي حصل في مجال المعلوماتية والخوارزميات لإيجاد الحلول للمشكلات الرياضية.

ومازال علم الرياضيات يقدم لنا العديد من النتائج و الحلول والنظريات والمبرهنات والتوسع بها وإيجاد حلول ابسط ومفاهيم أدق وعلم الجبر الخطي هو أحد فروع علم الرياضيات الذي يعتبر من الفروع المهمة والضرورية لكثير من العلوم والحصول علي ابسط الطرق المتسلسلة لتوسيع القدرات والمدارك للتعامل مع المفاهيم المجردة وايجاد حلولاً للعمليات الدقيقة والمعقدة للحصول علي نتائج دقيقة دون أخطاء وفي هذا الفصل سوف نقتصر المناقشة وعلي التعاريف الأساسية والمفاهيم الأولية للمتجهات والعمليات عليها بالإضافة إلي الضرب الاتجاهي وربطها بعلم الحاسوب وتطبيقها بالماتلاب.

المفاهيم الأساسية:

(2-1) تصنف الكميات الطبيعية بالعموم إلى كميات متجهة وكميات غير متجهة والتعاريف الأتية توضح ذلك.

أولاً: الكميات الغير متجهة: هي الكميات التي لها مقدار فقط مثل: الزمن، الكثافة، درجة الحرارة، وغيرها العديد.

ثانياً: الكميات المتجهة: هي الكميات التي لها مقدار واتجاه مثل: القوة، الاحتكاك، والسرعة، وغيرها العديد.

(2-2) تعريف المتجه: هو كمية لها مقدار واتجاه ويمكن التعبير عنه بمصفوفة مكونة من صف واحد أو عمود واحد وانواعه في الجبر الخطي "تحليلاً":

* **متجه صفي:** وهو مصفوفة مكونة من صف واحد فقط وعدة أعمدة مثل $a = [1\ 2\ 3]$

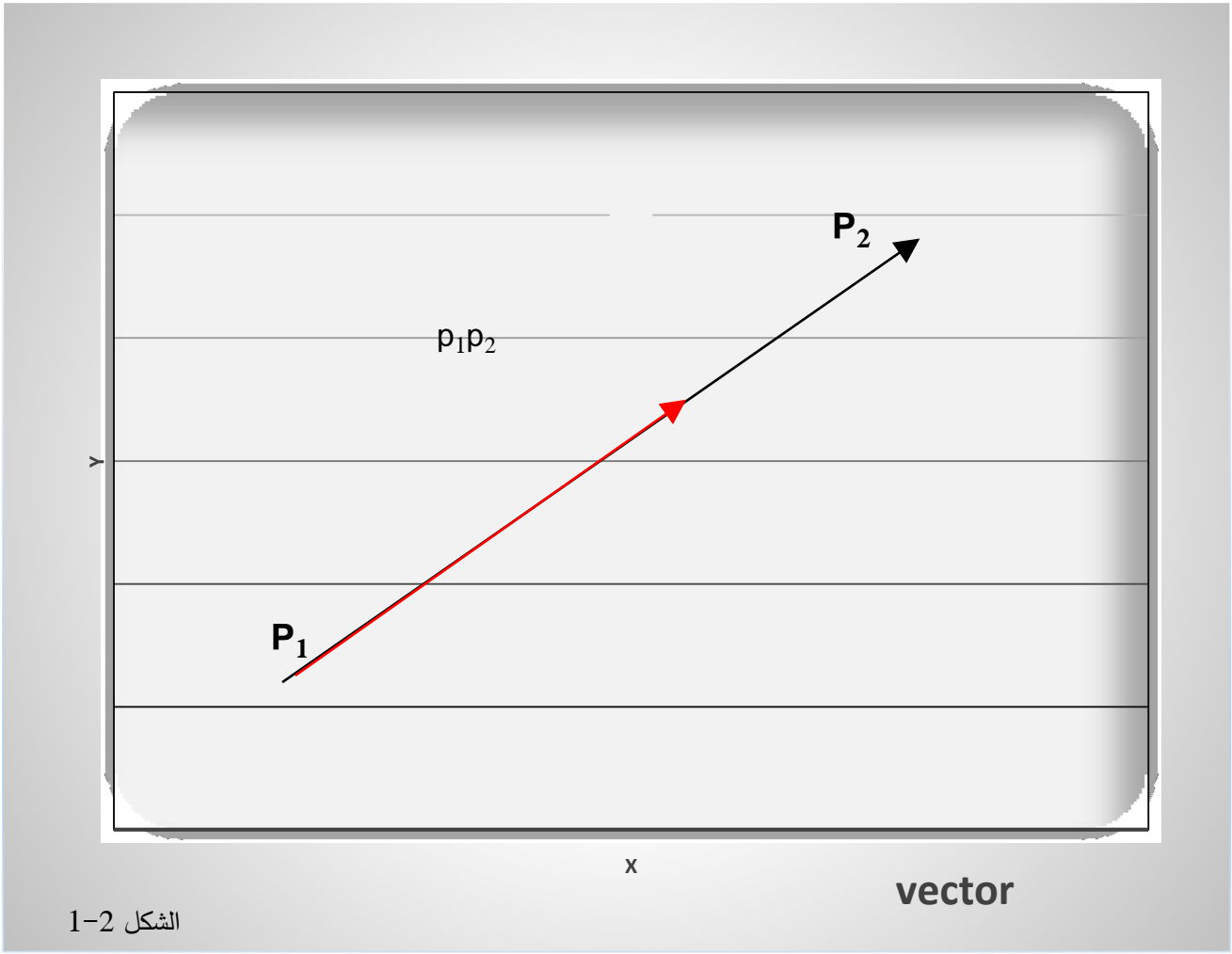
* **متجه عمودي:** وهو مصفوفة مكونة من عمود واحد فقط وعدة صفوف مثل $b = \begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}$

ويعبر عن مقدار المتجه p_1p_2 بطول قطعة مستقيمة كجزء من خطَ مستقيم في المستوى الكارتيزي p_1p_2 .

أما اتجاه المتجه يعبر عنه بسهم على القطعة المستقيمة حيث يدل السهم على اتجاه المتجه

$U= p_1p_2$

ولتحديد أي متجه في مستوي نعين له نقطة بداية ونقطة نهاية وذلك علي حسب اتجاه السهم.



الشكل 2-1

فللمتجه العديد من المفاهيم الأولية والقواعد الأساسية ومن ضمنها كيفية التعبير عنه كارتيزياً وانواعه العديدة والعمليات الرياضية على المتجهات مثل الجمع والضرب والطرح .

(2-3) ضرب المتجهات :

يصنف ضرب المتجهات إلي ضرب قياس (ناتجه كمية قياسية) وضرب متجهي (ناتجه كمية متجهة) :

A- الضرب القياسي:

اذا كان $\vec{U} = (u_1, u_2)$, $\vec{V} = (v_1, v_2)$ في IR^2 فان:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1v_1 + u_2v_2$$

بالمثل اذا كان :

$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ في IR^3 فان:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

وبصورة عامة إذا كان $\vec{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ في IR^n

فان الضرب القياسي لهما يكون علي النحو :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots + uv)$$

ومفهوم التعامل مع ضرب المتجهات في الفضاء الثلاثي أو النوني لا يختلف عن التعامل مع المتجهات في الفضاء الثنائي او مع اي عدد في مجموعة الأعداد الحقيقية حيث ان خواص الضرب للمتجهات هي نفسها المتعارف عليها منها وللضرب القياسي بعض الخواص نذكر منها:

1_خاصية التبديل

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

2_خاصية التوزيع

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$$

كذلك يمكن تعريف الضرب القياسي بصورة أخرى علي النحو :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U}\,\vec{V}\ COS\ , 0 \leq \boldsymbol{\theta} \leq \pi$$

حيث $\boldsymbol{\theta}$ هي الزاوية المحصورة بين متجهين $\vec{U}, \vec{V}$.

B_ الضرب الاتجاهي: إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متجهين فان الضرب الاتجاهي للمتجهين هو المتجه $\vec{U} \times \vec{V}$ ، حيث θ الزاوية المحصورة بين متجهين :

$$\vec{n} = \vec{U} \times \vec{V} = \vec{U}\,\vec{V}\ \text{Sin}\,\theta\ ,\quad \mathbf{0 \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\pi}}$$

حيث ان $\vec{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على كل من المتجهين $\vec{V}$ و $\vec{U}$ في IR^2 اما خواصه نذكر منها:

1_ خاصية التبديل $\vec{U} \times \vec{V} = \vec{V} \times \vec{U}$

2_ التوزيع : $\vec{U} \times (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \times \vec{V} + \vec{U} \times \vec{W}$

3_ التنسيق: $K(\vec{U} \times \vec{V}) = (K\vec{U}) \times \vec{V}$

$$= \vec{U} \times (K\vec{V})$$

$$= (\vec{U} \times \vec{V})\,K$$

(1.3.2) حاصل ضرب متجه في كمية قياسية:

مقدار المتجه $\vec{U}$عند ضربه في كمية قياسية K يعطي متجه اتجاهه في نفس اتجاه $\vec{U}$ هي حالة الكمية القياسية K موجبة ومقداره K من المرات مقدار المتجه $\vec{U}$ أما إذا كانت K سالبة في فإن اتجاه المتجه الناتج هو عكس اتجاه المتجه $\overrightarrow{U}$ ومقداره K من المرات مقدار المتجه $\vec{U}$ اما إذا كانت K=0 فان حاصل الضرب يكون متجه صفريا.

ومنها نعرف مقدار المتجه بالعلاقة التالية:

ليكن $\vec{U}$ متجه في IR^2 بحيث ($\vec{U} \neq 0$) نعبر عنه في الصورة الكارتيزية كالتالي:

$\vec{U}$ = (U_x , U_y) ϵIR^2 حيث U_x , U_y هي مركبات المتجه $\vec{U}$ في اتجاه المحورين x, y علي التوالي.

ويعبر عن المتجه $\vec{U}$ بمتجهات الوحدة العمودية في IR^2 :

$\vec{U}=U_X\,\vec{\imath} + U_Y\,\vec{\jmath}$

مقدار(طول) المتجه: $\vec{U}=U_X\,\vec{\imath} + U_Y\,\vec{\jmath}$

$$|\ \vec{U}\ | = \sqrt{(U_x)^2\ + (U_Y)^2}$$

(2-4) تعريف الفضاء المتجهي: لتكن F مجالا ما، ولتكن V مجموعة غير خالية من المتجهات معرف عليها عمليتين ثنائيتين الجمع والضرب وتحقق الشروط التالية:

العملية الاولى الجمع (+) بحيث تحقق الشروط :

1- تحقق عملية الانغلاق $\forall\ u,v \in V \rightarrow\ u+v \in V$

2 – قانون التبديل: $\forall\ u,v\ \ V \rightarrow u+v = v+u$

3– قانون التنسيق : $\forall\ u,v,w \in V \rightarrow (u+v)+w = u+(v+w)$

4 –قانون المحايد الجمعي " المتجه الصفري": $u \in V \quad \exists\ 0 \in V \rightarrow \quad u+0=0+u$

5– قانون المعكوس الجمعي: $u \in V\ , -u \in V \rightarrow\ u+(-u)=-u+u=0$

العملية الثانية الضرب القياسي (.) للعدد الثابت بالمتجه بحيث تحقق الشروط الاتية :

1– تحقق الضرب القياسي تحت عملية الانغلاق $\forall\ \ u \in V \cap\ , k \in F \rightarrow k.\vec{u} \in\ V$

2– المحايد الضربي: $u \in V\ , 1 \in F \rightarrow 1.u=u$

3– بحيث $\propto$ ، β ثوابت منها:

$\beta\ , \propto \in F\ , u \in V$

$(\propto \beta)=\ \beta\ (\propto u\ )$

$\beta\ , \propto \in F\ , u \in V \rightarrow (\ \propto +\ \beta\ )\ u = \propto u + \beta v$

4–التوزيع : $u,v \in V \cap k \in F \rightarrow\ k(u+v)=ku+kv$

اي ان $< * \ ، + \ ، v >$ نظام جبري مغلق " حقلا " عندئذ V يسمي فضاء متجها علىF وعناصر V تسمي متجهات إذا تحققت الشروط المذكورة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب القياسي .

مثال(1.4.2): هل مجموعة كل الثنائيات المرتبة V من IR^2 بحيث:

$\{ V = (x_1,x_2)\ ;\ x_1\ ,\ x_2 \in R\}$ تكون فضاء متجهي اثبت ذلك من التعريف.

الحل

أولا نعرف المتجهات:

$\forall\ u = (x_1,x_2)\ ,\ v = (y_1,y_2)\ ,\ w = (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$

1_ $u+v = (x_1 + y_1\ ,\ x_2 + y_2)$

$= (y_1 + x_1\ ,\ y_2 + x_2)$

$v+u$ عملية تبديلية

2_ $u+(v+w) = (x_1,x_2)+(y_1+z_1\ ,\ y_2+z_2)$

$= (x_1+y_1+z_1\ ,\ x_2+y_2+z_2)= (x_1+y_1\ ،\ x_2+y_2) + (z_1،z_2)= (u+v)+w$

$u+(v+w)$ عملية تنسيقية

3_ $\forall\ \vec{u}=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{u}+0 = (x_1,x_2) + (0,0)$ منها

$= (x_1+0\ ,\ x_2+0) =(0+x_1,0+x_2) = 0+\vec{u} = \vec{u}$

$(0,0)= \vec{0}$ محايد جمعي

4_ $\forall\ \ \vec{u} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\ \exists\ -\vec{u} = (-X_1\ ,\ -X_2) \in\ \mathbb{R}^2$

$\vec{u}+(-\vec{u}) = (x_1,x_2) + (-x_1\ ,\ -x_2)$ بحيث

$= (x_1+(-x_1))\ ,\ (x_2+(-x_2)) = (0,0)= \vec{0}$

$\vec{0} = (0،0)$ عملية المعكوس

5_ $\forall\ \vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2\ \exists\ K \in \mathbb{R}$

$\vec{u} = (x_1+x_2)$, $\vec{v} = (y_1+y_2)$

$K(u+v) = K\ (x_1+y_1\ , x_2+y_2)$

$= (\ K\ (x_1+y_1)\ ,\ K\ (x_2+y_2)\ )$

$= Kx_1+Ky_1\ ,\ Kx_2+Ky_2$

$= K\ (x_1+x_2) + K\ (y_1+y_2)$

عملية توزيع ثابت علي الجمع $K\vec{u} + K\vec{v}$

$6_\ \forall\ \vec{u}\ \in R^2\ \exists\ K_1,K_2 \in lR$

$\vec{u} = (x_1+x_2)$

$(K_1+K_2)\ \vec{u} = (K_1+K_2)\ (x_1,x_2)$

$= (K_1+K_2)x_1\ ,\ (K_1+K_2)x_2$

$= (K_1x_1+K_2x_1\ ,\ K_1x_2+K_2x_2)$

$= K_1(x_1,x_2) + K_2(x_1,x_2)$

$= K_1\vec{u} + K_2\vec{u}$

حاصل جمع ثوابت في متجه

$7_\forall\ \vec{u} \in lR^2\ \exists\ K_1\ ,\ K_2 \in lR$

$\vec{u} = (x_1+x_2)$

$(K_1K_2)u = (K_1K_2)\ (x_1,x_2)$

$= (\ (K_1K_2)x_1\ ,\ (K_1K_2)x_2\ )$

$= (K_1\ (K_2x_1\ ,K_2x_2)\ )$

$= K_1(K_2(x_1,x_2))$

$= K_1(K_2\vec{u})$

$8_\forall\ \vec{u} = (x_1,x_2) \in lR^2\ \exists\ ,\ 1 \in lR^2$

$1.\vec{u} = (1x_1, 1x_2)$

$= (x_1, x_2) = \vec{u}$

وبالتالي فان جميع الشروط في التعريف الفضاء الاتجاهي متحققة منها وبهذه الطريقة نستطيع تطبيق هذا في الحالة العامة "النونية" للمجموعة وتأكد من تطبيق هذه الشروط.

مثال(2.4.2): لتكن $V = IR^2$ حيث $V = \{(X,Y): X,Y \in R\}$

اثبت ان $V=IR^2$ لا يكون فضاء متجهات علي المجال $F = R$ لانه :

$(x_1,x_2) \neq (y_1,y_2) = (x_1+x_2 \ , \ y_1+y_2)$

$k(xy) \neq (kx \ , \ ky)$

عندما $U=(3,-2) \ , \ K_1=5 \ , \ K_2=4$

الحل

$(K_1+,K_2)U=(5+4)(3,-2)$

$=9(3,-2)$

$=(27,-2)$

وكذلك

$K_1U+K_2U=5(3,-2)+4(3,-2)$

$=(15,-2)+(12,-2)$

$=(27,-4)$

أي

$$(K_1+K_2)U=(27,-2) \quad \neq \quad K_1U+K_2U=(27,-4)$$

منها المجموعة $V = IR^2$ المعطاة لا تكون فضاء متجهي علي $F=IR$.

ملاحظة : ليكن V فضاء متجهي على المجال F وليكن $\vec{u} \in V$ متجها و $K \in F$ عددا فان:

$\vec{u}0=0 \ _1 \qquad (-1)\vec{u} = -\vec{u} \ _2 \qquad \vec{0} \ K=\vec{0} \ _3$

.

مثال(3.4.2): فضاء المصفوفات من نوع 3×3 في هذه الحالة "متجهات" هي مصفوفات؛ نستطيع جمع المصفوفتين و A+B=B+A ونوجد مصفوفة صفرية من حاصل جمع مصفوفتين A+B او عملية التبديل بينهما B+A التي استنتجت من الخواص الثمانية.

إذا ضربنا متجه في ثابت K وليكن على سبيل المثال 7 او −7 اي كمية عددية فإننا نتحصل على متجه في نفس المستوى للمتجه الأصلي.

وهذا المتجه الناتج من حاصل الضرب هو الذي يحقق أهم فكرة أساسية في نظرية الجبر الخطي وهي انه فضاء جزئي للفضاء الاصلي R^3 .

- **ومنها نعرف الفضاءات الجزئية وشروط تحققها:**

(2−5) الفضاءات الجزئية : هو مجموعة جزئية من الفضاء تكون فضاء تحت نفس العمليات والشروط والتي يمكن اختزالها في شرطين توضحهم المبرهنة التالية :

مبرهنة(1.5.2) : اذا كانت M مجموعة جزئية من فضاء المتجهات V على الحقل F فإن M تكون فضاء متجهات إذا وفقط تحقق الشرطان التاليان:

1_ إذا كانت $\vec{u}$, $\vec{v}$ متجهين في M فان $\vec{u}+\vec{v}$ يكون ايضا في M.

2_ إذا كانت $\vec{u}$ اي متجه في M وكان K اي عدد قياسي فإن Ku يكون ايضا في M.

البرهان:

(⇐)

نفرض ان M فضاء جزئي من الفضاء V وهذا يعني انها تحقق جميع شروط " الفضاء الاتجاهي" .

(⇒)

نفرض تحقق الشرطين 0u =0 و u− = u(−1) والمطلوب تحقيق باقي الشروط حتى يكون M فضاء جزئيا من V.

ليكن u ∈ M حسب الشرط (2) يكون Ku ∈ M لأي عدد قياسي K يوضح K = 0 ينتج:

u0=0∈M

وبوضع K=−1 ينتج: u(−1) = −u ∈ M.

بما ان لكل فضاء متجهي يوجد على الاقل فضاءان جزئيان، الفضاء V نفسه والمجموعة {0} " المتجه الصفري " تسمي الفضاءات البديهية.

مثال(2.5.2): بين ان المجموعة ، $M = \{\begin{pmatrix} 0 & e \\ g & 0 \end{pmatrix} e, g \in R\}$ من فضاء المتجهات $M_{2\times2}$ (R) على الحقل R تكون فضاء جزئي ام لا.

الحل

بما ان المجموعة الجزئية $M \neq \emptyset$ حيث $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$

وليكن $u = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ g_1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}$ عنصران في M وليكن k عدد قياسي

$$u + v = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 + e_2 \\ g_1 + g_2 & 0 \end{pmatrix} \in M$$

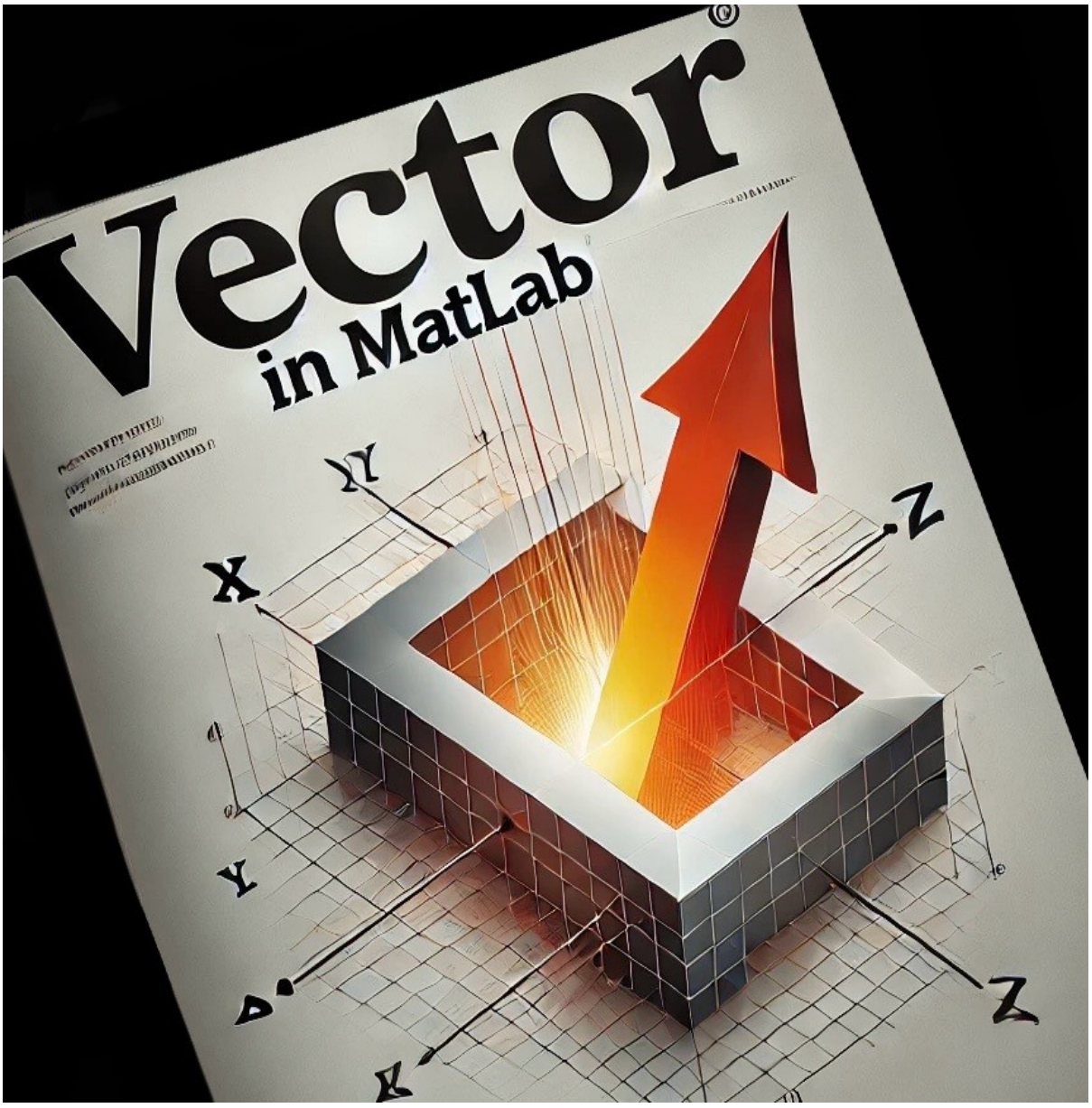
$$ku = k \cdot \begin{pmatrix} 0 & e1 \\ g1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ke_1 \\ kg_1 & 0 \end{pmatrix} \in M$$

واضح ان $u + v \in M$ و $ku \in M$ وبذلك M تكون فضاء جزئي من $M_{2\times2}(R)$ على حقل الاعداد الحقيقية.

ونحن في هذا الموضوع نقوم بدارسة الفضاءات المتجهة للأعداد الحقيقية بالإضافة الي الفضاءات الجزئية وجبر الفضاءات والجمع المباشر والاكثر من ذلك وامثلة توضيحية وكل هذا سوف يتم تطبيقه في الماتلاب لدمج المواد التحليلية بالتطبيقية وجعلها أكثر وضوحا ودقة واستبدالها بشاشة الحاسوب.

«الباب الثالث»

المتجهات في الماتلاب



محتويات الباب الثالث

3-1 انشاء متجه في الماتلاب

3-2 العمليات على المتجهات

وتنقسم إلي:

3-2-1 اضافة عنصر جديد في المتجه

3-2-2 ايجاد العنصر الأكبر والأصغر في متجه

3-2-3 المقارنة بين المتغيرات في متجه

3-2-4 دمج متجهين في متجه

3-2-5 ضرب المتجهات

3-2-6 استدعاء عنصر او عدة عناصر في متجه

3-2-7 حذف عنصر أو عدة عناصر

3-2-8 المتوسط الحسابي

3-2-9 القيمة المتوسطة

3-2-10 المضروب

المتجهات في الماتلاب

علمنا في الباب الأول ان الماتلاب هو برنامج رياضي يساعدنا في القيام بالعمليات الرياضية وتطبيقها ورسمها وعرفنا ان الماتلاب يتألف من مجموعة كبيرة من البرمجيات الفرعية والأدوات المختلفة والتي يمكن استخدامها وتوظيفها لحل تطبيقات رياضية وهندسية متعددة.
وعلمنا ايضا في الباب الثاني ان المتجه هو عبارة عن مصفوفة مكونة من صف واحد أو عمود واحد والمتجه الصفي الذي يتكون من صف واحد فقط وعدة اعمدة مثلاً:

A = **[1 2 3]**

والمتجه العمودي الذي يتكون من عمود واحد فقط وعدة صفوف مثلاً:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = B$$

وتطرقنا في الباب الثاني الي شروط الفضاء الاتجاهي والفضاء الجزئي وخواص الفضاءات الاتجاهية والعمليات عليها.
الان في هذا الباب سوف نتناول كيفية التطبيق وانشاء المتجهات داخل واجهة الماتلاب.

(3-1) ننشئ متجه في الماتلاب we create vector in matlab:

لكي نعرف متجه في الماتلاب لابد ان نراعي التالي:
1_ ان نفصل بين العناصر للصف بفراغ بينهم او وضع الفاصلة.
2_ ان نستخدم الفاصلة المنقوطة (؛) للإشارة الي نهاية كل صف.
3_ نضمن كل عناصر المتجه بالأقواس المربعة [ ] .

مثال (1.1.3): ليكن لدينا المتجه $\vec{A}$ المكون من صف واحد وخمسة أعمدة (1×5) حيث ان المتجه $\overrightarrow{A}$ متجه صفي يتكون من صف واحد وخمسة أعمدة.

كيف نمثل المتجه A بالماتلاب !!

A = [1,2,3,4,5]

الحل

- **الطريقة الاولي**

نقوم بتطبيق الخطوات التالية:

1_ نقوم بإدخال الرمز A ثم إشارة المساواة.

2_ نقوم بوضع القوس المربع.

3_نقوم بإدخال المركبات للمتجه A مع مراعاة المسافة بين كل مركب.

4_ إغلاق المتجه وذلك بوضع القوس المربع.

5_ ثم الضغط على زر (inter) سنرى منها صورة المتجه الذي تم إدخاله بصورة:

```
>> a=[1 2 3 4 5]

   a =

        1 2 3 4 5
```

- **الطريقة الثانية**

لتمثيل المتجه A بطريقة اخرى وذلك باستخدام (:) colon operator نتبع التالي:

1_ إضافة الرمز A مع إشارة المساواة.

2_ نضع القوس المربع.

3_ وضع أول عنصر في المتجه وهو 1 وأخر عنصر في المتجه وهو 5.

4_ تكون بين أول عنصر وأخر عنصر ورمز : وتقرأ one to five اي الأعداد من 1 الي 5.

5_ نضغط على enter نجد أن المتجه

```
>> a=[1:5]

a =

     1 2 3 4 5
```

مثال(2.1.3):

المتجه D هو متجه صفي (1×5) مثّل هذا المتجه بالماتلاب؟

d = [2 4 6 8 10]

الحل

نتبع نفس الخطوات المثال السابق في إدراج المتجه بالطريقة الأولي وينتج

```
>> d=[2 4 6 8 10]
d =
     2     4     6     8    10
```

*الان بطريقة الثانية وهي باستخدام الرمز:

1_ إضافة الرمز d مع إشارة المساواة.

2_ نضع القوس المربع.

3_ وضع أول عنصر في المتجه وهو 2 ثم رمز (:) ثم 2 لأنها تمثل مقدار الزيادة او النقصان على حسب اشارة العنصر الاوسط في كتابة المتجه، ثم الرمز: ثم اخر عنصر في المتجه وهو 10 ويتم قراءة المتجه بالماتلاب من اليسار الي اليمين.

```
>> d=[2:2:10]
d =
     2     4     6     8    10
```

لتوضيح العملية التي تم اجرائها والتي تبين لنا انها كانت مخصصة برمز حيث ان وظيفة هذا الرمز هو إيجاد القيم التي تكون بين أصغر عنصر وهو 2 وأكبر عنصر وهو 10

وكان المقدار هو الزيادة بين كل قيمة واخرى لأنه موجب 2.

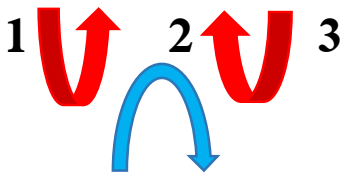
حيث يدل 1 على أول عنصر في المتجه، اما 3

يدل على اخر عنصر في المتجه،

اما 2 يدل على مقدار الزيادة أو النقصان أو

الفرق بين كل قيمة وأخري.

```
>> d=[2:2:10]
```



في المثال السابق طبقنا المتجه بطريقة مختصرة بدلا من كتابة كل عنصر علي حدى وتفاديا لأي خطأ ممكن وأسرع وقتا لان في بعض الحالات قد يكون المقدار الزيادة او النقصان بين عناصر المتجه كبيرا لذا استعملنا مقدار الزيادة او النقصان، من هذه الطريقة يمكننا ايضا تطبيقها تصاعديا وتنازليا اي انه يكون مقدار الزيادة تناقصيا اي يبدأ المتجه بالقيم الكبرى إلي أصغر قيمة في المتجه اي يقرأ الماتلاب الأمر الذي تم إدخاله للمتجه من اليمين الي اليسار ولتوضيح ذلك بشكل أسهل نطبق هذا المثال في الماتلاب.

مثال(3.1.3):

كون متجه في الماتلاب بحيث يكون المتجه يحوي قيم موجبة تبدأ من الصفر إلى الرقم 10 مرتبة ترتيب:

1) تصاعدي 2) تنازلي

الحل

أولا: تصاعديا، اي تكون القيم متدرجة من أصغر قيمة الي أكبر قيمة وبتطبيقها على الماتلاب نحصل علي:

```
>> b=0:1:10
= b
```

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

ثانيا: تنازليا، اي تكون القيم متدرجة من أكبر قيمة الي أصغر قيمة وبتطبيقها على الماتلاب نحصل علي:

```
>> e=10:-2:0
e=
    10     8     6     4     2     0
```

بالإضافة الي الترتيب التنازلي والتصاعدي التي تم توضيحها سابقاً هناك طريقة أخرى لترتيب العناصر عن طريق الأمر sort، اي يعني عند إعطاء هذا الأمر لمتجه فإنه يقوم بترتيب عناصر هذا المتجه من الاصغر الي الاكبر.

مثال(4.1.3):

```
>> w=[-1 6 -6 7 -2]
w =
    -1     6    -6     7    -2

>> sort(w)
ans =
    -6    -2    -1     6     7
```

مثال(5.1.3):

المتجه M هو متجه عمودي يتكون (5×1) كيف يمثل هذا المتجه في الماتلاب؟

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

الحل

* نتبع نفس الطريقة مع استعمال الفاصلة المنقوطة التي تدل على نهاية كل صف لأنه متجه عمودي.

```
>> c=[1;2;3;4;5]

= c

1

2

3

4

5
```

وهنا نجد اننا وضحنا كيفية تكوين متجه وانواع المتجهات، لأن لاستدعاء عنصر من عناصر المتجه نستخدم الخطوات التي تعرفنا إليها مسبقاً بالإضافة الي مكان العنصر المطلوب ايجاده وهذه الطريقة تفيد أكثر عندما يكون المتجه يحتوي على عدد عناصر كبير ولتوضيح هذا نطبق الخطوات المطلوبة علي المثال السابق.

مثال(6.1.3):

```
>> c=[1;2;3;4;5]

= c

1

2

3

4

5
```

استدعاء العنصر الثاني

```
>> c(2)
```

```
ans =
2
```

```
>> c(1:3)                    استدعاء العناصر من العنصر الاول الي الثالث
ans =
1
2
3
```

```
>> c(end:-1)                 استدعاء العنصر ما قبل الاخير
ans =
     4
```

```
>> c(end)                    استدعاء العنصر الاخير
ans =
     5
```

```
>> c(3:end)                  استدعاء العناصر من الثالث الي الاخير
ans =
     3
     4
     5
```

```
 >> c(2:2:5)                استدعاء العناصر من الثاني الي الخامس ومقدار الزيادة 2
ans =
```

2

4

>> c(end:−2:1) استدعاء العناصر من الاخير الي الاول ومقدار النقصان2

ans =

5

3

1

أحينا في بعض المتجهات تكون عناصرها عشرية اي مقدار الزيادة او النقصان بين العناصر صغير جدًا اي ليس قيمة صحيحة، وعندما تكون عناصر المتجه كثيرة جدًا من حيث عدد العناصر سوف يقسمها الماتلاب بحيث تظهر كل مجموعة معا مرتبة بالتسلسل، وهنا لاستدعاء العناصر في المتجهات كثيرة نتبع نفس الطرية السابقة لتوضيح أكثر في الامثلة التالية حيث ان through تعني عدد العناصر السابقة و columns تعني الأعمدة:

مثال(7.1.3):

>> B=[8:0.2:9]

B =

8.0000 8.2000 8.4000 8.6000 8.8000 9.0000

مثال(8.1.3):

>> k=[−1:0.1:1]

= k

Columns 1 through 6

−1.0000 −0.9000 −0.8000 −0.7000 −0.6000 −0.5000

Columns 7 through 12

−0.4000 −0.3000 −0.2000 −0.1000 0 0.1000

Columns 13 through 18

0.2000 0.3000 0.4000 0.5000 0.6000 0.7000

Columns 19 through 21

0.8000 0.9000 1.0000

مثال(9.1.3):

```
>> t=[1:100]
t =
Columns 1 through 10
10  9  8  7  6  5  4  3  2  1
Columns 11 through 20
20  19  18  17  16  15  14  13  12  11
Coumns 21 through 30
30  29  28  27  26  25  24  23  22  21
Columns 31 through 40
40  39  38  37  36  35  34  33  32  31
Columns 41 through 50
50  49  48  47  46  45  44  43  42  41
Columns 51 through 60
60  59  58  57  56  55  54  53  52  51
Columns 61 through 70
70  69  68  67  66  65  64  63  62  61
Columns 71 through 80
80  79  78  77  76  75  74  73  72  71
Columns 81 through 90
90  89  88  87  86  85  84  83  82  81
Columns 91 through 100
   91  92  93  94  95  96  97  98  99  100
```

>> d=[1:2:100] هنا القيم من الصغيرة الي الكبيرة والبعد بين القيمتين 2

d =

Columns 1 through 10

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

Columns 11 through 20

21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

Columns 21 through 30

41 43 45 47 49 51 53 55 57 59

Columns 31 through 40

61 63 65 67 69 71 73 75 77 79

Columns 41 through 50

81 83 85 87 89 91 93 95 97 99

>> n=[100:-2:0] هنا القيم مأخوذة من اكبر قيمة الي اصغرها والفرق 2-

n=

Columns 1 through 10

82 84 86 88 90 92 94 96 98 100

Columns 11 through 20

62 64 66 68 70 72 74 76 78 80

Columns 21 through 30

42 44 46 48 50 52 54 56 58 60

Columns 31 through 40

22 24 26 28 30 32 34 36 38 40

Columns 41 through 50

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

Column 51

لمعرفة كم عنصر يحتوي المتجه السابق او اي متجه نقوم باستخدام الامر (length) الذي يوجد لنا عدد عناصر المتجه ويسمى ايضاً **طول المتجه** كالتالي:

مثال(10.1.3):

```
>> length(n)
ans =
    51
```

الان لاستدعاء عناصر متجه نتبع نفس الطرق السابقة الان نريد حفظ العنصر داخل المتجه بمسي معين قد نحتاج الي تغير قيمته في وقت لاحق ولحفظ العنصر برمز خاص به نرى توضيح هذا في المثال الاتي:

مثال(11.1.3):

```
>> x=[40 50 60 70 80]
x =
   40    50    60    70    80
```

```
>> x(2)                    استدعاء العنصر الثاني
ans =
   50
```

وضع اسم للعنصر الثاني بدلا من الاستدعاء بالطريقة التقليدية نقوم باستدعائه بكتابة الرمز المختار مسبقا .

```
>> e=x(2)
e =
     50
```

وايضا يمكننا تغيير قيمة العنصر

```
>> x(2)=0
x = 0
40     0    60    70    80
```

في بداية المثال المتجه عبارة عن صف وعدة اعمدة ولتغيره الي عمود وعدة صفوف نقوم بوضع قوسي الاستدعاء بدون قيم كالتالي:

```
>> x(:)
ans  =
40
0
60
70
80
```

او بطريقة اخري وهي وضع العلامة (') بجانب اسم المتجه

```
>> x
x =
    40     0    60    70    80
>> x'
ans =
    40
     0
    60
    70
    80
```

فيما سبق تعرفنا على الخواص الاتجاهية، والعمليات الرياضية التي تتم على المتغيرات تتم ايضا على المتجهات ولكن تتم هذه العمليات على كل قيمة منفردة داخل المتجه ونستنتج هذا من المثال التالي.

مثال (12.1.3):

أوجد الجذر التربيعي للقيم التالية في صورة متجهيه باستخدام الماتلاب

√4 √9 √144 √81

الحل

```
>> sqrt ([4 9 144 81])
ans =
     2     3    12     9
```

نرى هنا عند استخدام برنامج الماتلاب تم ادخال أكثر من قيمة وايجاد الجذر التربيعي لكل قيمة وكانت النتائج منفصلة وواضحة على عكس الالة الحاسبة حيث تدمج القيم مع بعض، وهنا نتأكد من ميزة برنامج الماتلاب انه يوفر الجهد والوقت ونتائج ادق.

(3-2) العمليات على المتجهات :

(1.2.3) إضافة عنصر جديد في المتجه:

لإضافة عنصر جديد او مكرر قيمته للمتجه نتبع الخطوات التالية:

1_ نكتب اسم المتجه

2_ نحدد تسلسل العنصر (مكانته) المراد اضافته بين قوسين

3_علامة المساواة

4_ قيمه العنصر المضاف

مثال (1.2.3): أضف عناصر حسب الاوامر المدخلة للمتجه التالي ثم اوجد طول المتجه؟

الحل

```
>> p=[2 4 6 8 10 12 14]
p =
     2     4     6     8    10    12    14
>> p(3)=1                                  تبديل مكان القيمة الثالثة بالرقم 1
   p =
     2     4     1     8    10    12    14
>> p(8)=9                                  اضافة عنصر ثامن قيمته 9
p =
     2     4     1     8    10    12    14     9

>> length(p)
ans =
     7
```

(2.2.3) ايجاد العنصر الاكبر والاصغر في المتجه :

لإيجاد أكبر عنصر وأصغر عنصر في المتجه نستخدم الامر max لإيجاد العنصر الكبير وmin لإيجاد العنصر الصغير مع كتابة اسم المتجه داخل القوسين () والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (2.2.3):

اوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتجه [7 6 9 5 10] = s باستخدام الماتلاب.

الحل

```
>> s=[10 5 9 6 7]
s =
    10     5     9     6     7

>> max(s)
ans =
     10
>> min(s)
ans =
     5
```

بالإضافة الي ايجاد القيمة العظمى للمتجه يُمكننا الماتلاب ايضا من إيجاد موقع هذه القيمة باستخدام هذه الصيغة:

```
[m,i]=max(x)
```

حيث أن m تمثل القيمة العظمى و i تمثل الموقع لهذه القيمة.

مثال(3.2.3):

اوجد القيمة العظمى للمتجه التالي، مع إيجاد موقع هذه القيمة مستخدما الماتلاب؟

X=[2 9 7 10 33 77 91 85 3 21]

الحل

```
>> x=[ 9  10 33 91 85]
x=
    9    10    33    91    85

>> [m,i]=max(x)
m=
   91
i=
    4
```

نلاحظ ان المتجه X يتكون من 5 عناصر وأن القيمة العظمى لهذا المتجه هي 91 وموقع هذا المتجه حسب التسلسل داخل عناصر المتجه هو ال(4).

(3.2.3) المقارنة بين المتغيرات:

عندما يكون لدينا متغيران (اي متجهين) متساويان في عدد عناصر (اي الحجم) لمتجهان ما فإننا نقوم بمقارنة العناصر للمتغيرات واستخراج أكبر او أصغر القيم بين المتغيران اي المقارنة بين كل عنصر في المتجه الاول وما يقابله من عنصر في المتجه الثاني.

مثال(4.2.3):

قارن بين عناصر المتجهين من حيث العناصر الكبرى مستخدما الماتلاب لتوضيح.

Z=[4 8 7 2 0 9 9 3] , t=[2 1 0 8 7 3 1 3]

الحل

```
>> z=[4 8 7 2 0 9 9 3]
z =
     4     8     7     2     0     9     9     3

>> t=[2 1 0 8 7 3 1 3]
t =
     2     1     0     8     7     3     1     3

>> max(z,t)
ans =
     4     8     7     8     7     9     9     3
```

ايضا من صيغ المقارنة بين العناصر يمكن ايضا للماتلاب القيام بالمقارنة بين متجه ومتجه اخر متساوي القيم ولتوضيح هذا نستخدم أحد المتجهين السابقين مع متجه جميع عناصر 2.

```
>> t=[2 1 0 8 7 3 1 3]
t =
     2     1     0     8     7     3     1     3
>> max(t,2)
ans =                                   نلاحظ انه قارن بين كل عنصر ونظيره واختزل القيمة الاكبر
     2     2     2     8     7     3     2     3
```

(4.2.3) دمج متجهين في متجه:

يتيح لنا برنامج الماتلاب دمج متجهين في متجه واحد سواءً متجه صفي او عمودي وذلك عن طريق:

1_ كتابة المتجه وعناصره داخل البرنامج وليكن d.

2_ كتابة المتجه الثاني داخل البرنامج وليكن h.

3_ لدمج كل من المتجهين d، h نسمي متجه جديد مثلاً r ونكتب اسم المتجهين المراد دمجهم

لتوضيح هذا أكثر نتبع الخطوات المتسلسلة للمثال التالية:

مثال (5.2.3):

```
>> d=[2 4 6]
d =
     2     4     6

>> h=[8 10 12]
h =
     8    10    12

>> r=[d h]
r =
     2     4     6     8    10    12
```

نرى هنا انه تم دمج كل من المتجه الاول مع المتجه الثاني في متجه واحد

(5.2.3) مقياس المتجه :

هو المدى الذي تصل اليه قيمة عناصر المتجه، اي ليس عدد العناصر داخل المتجه المدخل.

صور مقاييس المتجه الشائعة رياضياً:

المقياس الاول $1_\ \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|X1| + |X2|+\ldots+|Xn|$

المقياس الثاني $2_\ \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2+x^2_2+ \ldots +x_n^2}$

المقياس الثالث أي مقياس (∞) $3_\|X\|_3 = \max\{|xi|\}$

ولتطبيق أنواع المقاييس في الماتلاب لتوضيح الفرق بينهم وكيفية كتابة أوامر كل مقياس داخل البرنامج نقوم بإتباع الخطوات الموضحة بالتفصيل في هذا المثال.

مثال (6.2.3):

اوجد المقاييس الثلاثة للمتجه التالي باستخدام الماتلاب:

S=[1 2 3]

الحل

باستخدام المقياس الاول

```
>> s=[1 2 3]
s =
    1     2     3
```

```
>> norm(s,3)
ans=
    6
```

نلاحظ ان المقياس هنا مجموع القيم المطلقة للأعداد

اي حاصل جمع كل قيمة مربعة داخل الجذر التربيعي

باستخدام المقياس الثاني

```
>> norm(bi)
ans=
      3.7417
```

او بطريقة اخري

```
>> norm(b,2)
ans=
    3.7417
```

نلاحظ ان هذا المقياس هو حاصل جمع القيم المربعة تحت الجذر التربيعي

باستخدام المقياس الثالث

```
>> norm(b,inf)
ans =
     3
```

يعطى اكبر قيمة في المتجه المدخل Inf نلاحظ ان مقياس

مثال (7.2.3):

اوجد للمتجه v=[−10 −5 3] التالي :

1_ المقياس الاول

2_ المقياس −∞

الحل

المقياس الاول

```
>> v=[−10 −5 3]
v =
   −10    −5     3
>> norm(v,1)
ans =
    18
```

المقياس الثالث

```
>> norm(v,inf)
ans =
    10
```

نلاحظ ان مقياس inf هو أكبر قيمة مطلقة للمتجه.

(6.2.3) ضرب المتجهات:

في الباب الثاني تعرفنا على المتجهات والفضاءات المتجهة وعرفنا ان هناك عمليات تجرى على المتجهات ومنها الضرب، وكان لضرب المتجهات نوعان وهو ضرب قياسي وضرب اتجاهي وعند تطبيق أنواع الضرب في الماتلاب هناك شروط لكل نوع وهي على النحو التالي:

1_ الضرب القياسي: يجب ان يكون للمتجهات نفس الطول ويعبر عن عملية الضرب القياسي في الماتلاب dot (A,B).

2_ الضرب الاتجاهي: يجب ان تكون عناصر المتجه تتكون من ثلاث عناصر، ويكون المتجهان لهما نفس الحجم، ويعبر عن عملية الضرب الاتجاهي cross (A,B) .

مثال (8.2.3):

لدينا المتجهان A ، B :

A=[1 2 3] B=[4 5 6]

أوجد ما يلي:

1_ الضرب القياسي 2_ الضرب الاتجاهي

الحل

```
>> A=[1 2 3]
A =
     1     2     3

>> B=[4 5 6]
B =
     4     5     6

>> cross(A,B)
```

```
ans =
    −3     6    −3
```

نلاحظ ان الضرب الاتجاهي يعطينا نفس عدد الصفوف وعدد الاعمدة

```
>> dot(A,B)
ans =
    32
```

نلاحظ ان الضرب القياسي يعطينا قيمة واحدة اي متجه واحد

(7.2.3) حذف عنصر او عدة عناصر من المتجه :

لحذف عنصر من متجه تم إدخاله في الماتلاب نقوم بالخطوات التالية:

1_ تعريف المتجه داخل برنامج الماتلاب.

2_ كتابة اسم المتجه ثم قوسين () ، يكون داخل ترتيب العنصر اي موقعه.

مثال (9.2.3) :

للمتجه a=[1 2 3 4 5 6 7 8] احذف العناصر التالية:

1_ العنصر الأول. 2_حذف العناصر من الأول الي الثالث.

3_ حذف العناصر من الأول الي الاخير.

الحل

```
>> a= [1 2 3 4 5 6 7 8]
a =
    1     2     3     4     5     6     7     8
```

```
>> length(a)

ans =

     8                                   عدد العناصر داخل المتجه


>> a(1)=[ ]                             حذف العنصر الاول من المتجه

a =

     2     3     4     5     6     7     8          نلاحظ حذف
                                                  العنصر الاول من المتجه


>> length(a)

ans =

     7

   >> a(1:3)=[ ]                         حذف العناصر من الاول الي الثالث

a =

    5     6     7     8


   >> a(2:length(a))=[ ]                 هنا الامر هو حذف العناصر

a =                                      من الثاني الي الاخير

        5
```

(8.2.3) المتوسط الحسابي:

كما علمنا سابقا ان المتجه يتكون من عدد من العناصر وتكون العناصر إما مختلفة القيم او متساوية او قيم عشرية ، و تمكننا ايضا من ايجاد العنصر الاكبر وايضا العنصر الاصغر داخل عناصر المتجه وايضا ايجاد موقعه ، الان سوف نقوم بحساب المتوسط الحسابي للمتجه المعطى ، اي يعني إيجاد قيمة تمثل المعدل العام داخل عناصر هذا المتجه وهي بالطريقة المعتادة هي مجموع القيم علي عددهم ولاكن برنامج الماتلاب لا يقوم بحساب هذه القيم تفصيلا حيث سوف تستغرق وقتا ، لذا فبرنامج الماتلاب نقوم بإدخال المتجه ، ثم نقوم بإدخال الامر الخاص بالمتوسط الحسابي ولتوضيح هذا أكثر نتبع الخطوات في المثال التالي.

مثال (10.2.3) : اوجد المتوسط الحسابي للمتجه التالي:

X=[9 10 33 91 85]

الحل

```
>> x=[ 9  10 33 91 85]
x =
    9    10    33    91    85

>> mean(x)
ans =
     45.6000
```

(9.2.3) القيمة المتوسطة :

المقصود بالقيمة المتوسطة هي إيجاد القيمة التي موقعها الاوسط (في المنتصف) لعناصر المتجه بعد ترتيب المتجه حسب القيم سواء (تنازلياً او تصاعديا) اي ان برنامج الماتلاب لا يقوم بترتيب المتجه لنا عندما تكون القيم عشوائية " ليست مرتبة " عند ايجاد القيمة المتوسطة اي لا تتم إعادة عرض القيم مرتبة ، بل يتم فقط إيجاد العنصر الأوسط مباشرة بعد الترتيب .

مثال (11.2.3): اوجد القيمة المتوسطة للمتجه التالي:

```
>> x=[ 9  10 33 91 85]
x=
    9    10    33    91    85
```

```
>> median(x)
ans =
     33
```

في المثال السابق كان عدد العناصر فردياً، فكان من السهل ايجاد القيمة المتوسطة، ولكن احياناً عدد العناصر زوجيا فيكون لدينا قيمتان متوسطتان، هنا برنامج الماتلاب سوف يأخذ القيمة المتوسطة بين هاذين القيمتين ولتوضيح أكثر نذكر هذا في مثال.

المثال (12.2.3) :

```
>> s=[8 5 2 6 3 1]
s =
     8     5     2     6     3     1
>> median(s)
ans =
```

هي قيمة متوسطة بين العددين 3 و5

(10.2.3) المضروب :

المضروب هو عبارة عن حالة خاصة من المضروب التراكمي ، تسمي المضرب التراكمي العام وذلك انها تجد ناتج الضرب لجميع عناصر المتجه.

مثال (13.2.3) :

```
>> u=[2.5 8 4 1.4]
u=
    2.5000    8.0000    4.0000    1.4000
>> prod(u)
ans =
   112
```

الخاتمة

مع الوصول إلى نهاية هذا المشروع، أعبّر عن فخري بما تم إنجازه من عمل يعكس جهدي ورؤيتي الشخصية. لقد واجهت تحديات متعددة، لكنها كانت فرصًا للتعلم والنمو. آمل أن تسهم نتائج هذا المشروع في إحداث أثر إيجابي في المجال الذي استهدفته، وأن تكون بداية لمزيد من التطوير والإبداع. خالص شكري وامتناني لكل من دعمني ووجهني خلال هذه الرحلة، وأسأل الله أن يوفقني في تحقيق طموحاتي المستقبلية.

المراجع

1. زياد عبد الكريم، التطبيقات الرياضية والهندسية باستخدام الماتلاب، الطبعة نسخة الكترونية pdf، دولة النشر: عمان، جهة النشر: مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع، سنة النشر: 2013.
2. د.المبروك علي ود. محمد الأحمر، أساسيات الجبر الخطي، دولة النشر: بيروت، جهة النشر: دار الكتاب الجديد– بيروت، سنة النشر: 2002.
3. جلبرت سترانج، ترجمة: فارق البرقي ورمضان جهيمة، الجبر الخطي وتطبيقاته ،الطبعة ط.2 ، دولة النشر: غير محددة، جهة النشر: دار الفكر العربي بيروت 2000;2000، سنة النشر: 1994.
4. موارى ر. شبيجل، تحليل المتجهات ، الطبعة الثالثة، جهة النشر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية سنة النشر: 1996 .
5. الزوام دله، أبو عجيلة حسن، وخليفة نصر، الجبر الخطي، الجزء غير محدد، الطبعة الثالثة ، جهة النشر: منشورات جامعة الفاتح، سنة النشر: 2005.
6. عصام نياب، كتاب الماتلاب ، الطبعة نسخة الكترونية pdf ،.
7. م. أحمد هادي، كتاب البرمجة بلغة الماتلاب، الطبعة: نسخة الكترونية pdf ، سنة النشر 2002.
8. محمد بن صالح وماجد إبراهيم، كتاب مدخل إلى الماتلاب (5.0)، جهة النشر: جامعة الملك سعود .
9. خالد الهندي، كتاب مقدمة في برمجة الماتلاب، الطبعة نسخة الكترونية pdf ، سنة النشر: 2007.
10. عصام سرحان دياب، كتاب الماتلاب MATLAB، الطبعة نسخة الكترونية pdf غير مذكورة .